

# Identificación de la celda de Voronoi en retículos euclidianos 4-dimensionales de Tipo I vía parámetros de Selling.

por

CLAUDIA MARCELA VALENCIA GUZMAN

Trabajo presentado como requisito parcial para  
optar al título de Master en Matemáticas de la

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Director: Dr. Juan Miguel Velásquez Soto

Asesor: Ph. D. Bernardo Uribe Jongbloed

Diciembre de 2014



*A mi familia*



# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1. Definiciones Básicas . . . . .	9
1.2. Lattices y formas cuadráticas. . . . .	14
1.3. Superbases y Parámetros de Selling . . . . .	15
1.4. Retículos Tipo I en dimensiones bajas. . . . .	18
1.5. Tipos de coordenadas asociadas. . . . .	22
1.6. Vectores y celdas de Voronoi . . . . .	23
<b>2. Clasificación de retículos.</b>	<b>27</b>
2.1. Descripción celda de Voronoi dimensión 2. . . . .	27
2.2. Descripción Celda de Voronoi en Dimensión 3. . . . .	31
<b>3. Descripción Celda Primitiva en retículos Tipo I 4-dimensionales.</b>	<b>35</b>
3.1. Vectores de Voronoi y Facets. . . . .	35
3.2. Vertices de Facets. . . . .	37
3.3. $\mathbf{y}$ -coordenadas de los vértices de $S(\mathbf{0})$ . . . . .	38
3.4. Aristas de $S(\mathbf{0})$ . . . . .	39
<b>4. Descripción de retículos Zonotopales en dimensión 4.</b>	<b>41</b>
4.1. Retículos Zonotopales en Dimensión 4. . . . .	42
<b>5. Apéndice</b>	<b>59</b>



# Introducción

Un *retículo*  $n$ -dimensional en un espacio euclídeo es un subconjunto  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}^m$  formado por todas las combinaciones enteras de  $n$  vectores linealmente independientes de  $\mathbb{R}^m$ , es decir  $\Lambda = \{\sum_{i=1}^n x_i v_i : x_i \in \mathbb{Z}\}$  donde el conjunto  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base para  $\Lambda$ . La región del espacio euclídeo que contiene al retículo, cuyos puntos están a una distancia de  $\mathbf{v} \in \Lambda$  menor o igual que de cualquier otro punto del retículo se conoce como la *celda de Voronoi* asociada a  $\mathbf{v}$ . En otras palabras, dado un retículo  $\Lambda$  y  $\mathbf{v} \in \Lambda$ , se define la celda de Voronoi  $S(\mathbf{v})$  como  $S(\mathbf{v}) := \{x \in \mathbb{R}^n : N(x - \mathbf{v}) \leq N(x - \mathbf{w}), \text{ para todo } \mathbf{w} \in \Lambda\}$ .

La celda de Voronoi permite reconstruir el retículo a partir de traslaciones consiguiendo un embaldosamiento del espacio. En dimensión 2, la celda de Voronoi asociada al retículo es hexagonal o rectangular, mientras que, en dimensión 3 hay cinco tipos de celdas de Voronoi y en dimensión 4 hay 52 tipos de celdas de Voronoi asociadas al retículo.

Nuestro interés en determinar una descripción detallada de la celda de Voronoi vía los parámetros de Selling, esta motivado en la solución de algunos de los problemas más importantes relacionados con retículos: El *packing problem*, donde se trata de empaquetar esferas del mismo tamaño de la manera más eficiente posible; el *covering problem*, que trata de cubrir el espacio con esferas del mismo tamaño que se superponen de la manera más económica; el *kissing number*, se trata de disponer el mayor número de esferas tocando a una esfera prefijada, todas del mismo tamaño; y el *quantizer problem*, donde se digitalizan datos que llegan tratando de cometer el menor error posible. En cada uno de los problemas mencionados es posible hacer uso de la celda de Voronoi para hallar la solución de ellos; se puede mostrar que en el packing problem habrá una esfera dentro de cada celda de Voronoi; en el covering problem se pone una esfera cubriendo justo una celda; en el kissing number habrá tantas esferas tocando a una fija como paredes de la celda haya a distancia mínima del punto del retículo dentro de la celda; y en el quantizer problem se considera el error cuadrático medio en la celda de Voronoi.

Nos proponemos hacer la identificación de las celdas de Voronoi a través de los parámetros de Selling en los retículos Tipo I llamados Zonotopales los cuales se derivan de un permutohedro. Es decir, dada una forma cuaternaria definida positiva que tiene asociada una superbase obtusa, dar una descripción detallada de cuántos vértices, aristas, caras 3-dimensionales y caras 2-dimensionales conforman la celda de Voronoi asociada a esa superbase así como, identificar quienes son en términos de las  $y$ -coordenadas. Tal descripción no se encuentra en los trabajos de Delone, Conway y tampoco los trabajos de Vallentin. Sabemos que una buena descripción de la celda de Voronoi en términos de los parámetros del retículo, bien sea de Selling, las conormas, las vonormas o cualquiera otros, sería de mucha ayuda a la hora de tratar de resolver cualquiera de los problemas arriba mencionados.

En el Capítulo 1 presentamos los preliminares básicos sobre retículos que necesitaremos a lo

largo del trabajo, todos los resultados presentados pueden encontrarse en Conway-Sloane [CS]. El lector que se encuentre familiarizado con estos conceptos puede iniciar la lectura en el Capítulo 2.

En el Capítulo 2, presentamos la clasificación de los retículos en dimensiones bajas de acuerdo con la estructura topológico-combinatoria de su celda de Voronoi, los resultados que hemos incluido en este capítulo han sido tomados de los trabajos de [Co], [Fed], [Va], [Vo] entre otros. En este capítulo haremos un recorrido ligero por esas clasificaciones y usaremos técnicas similares a [Co] que servirán de inspiración para una acercamiento del mismo problema en dimensión 4.

En el Capítulo 3, presentamos una descripción detallada de cuántos vértices, aristas, caras 3-dimensionales y caras 2-dimensionales conforman la celda de Voronoi asociada a esa superbase en dimensión 4 así como, una identificación en términos de las  $\mathbf{y}$ -coordenadas de cada uno de ellos.

En el Capítulo 4, presentamos una descripción de las celdas de Voronoi para retículos de Tipo I o Zonotopales que se determinó a partir de algoritmos que permiten encontrar la cantidad de vértices, aristas, caras 2-dimensionales y caras 3-dimensionales que conforman la celda de Voronoi del retículo, así como las  $\mathbf{y}$ -coordenadas de cada uno de sus vértices. Tal descripción la establecemos, en virtud del Lema 3.4.1: Dado un retículo primitivo de Tipo I reducimos continuamente (siempre que el retículo no pierda dimensión) una zona de aristas hasta que colapsen, y la celda cambia de forma.

En el Apéndice se encuentran los algoritmos implementados para obtener la cantidad de vértices, aristas, caras 2-dimensionales y caras 3-dimensionales que conforman la celda de Voronoi de los retículos Tipo I, así como las  $\mathbf{y}$ -coordenadas de cada uno de sus vértices.



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo presentamos algunas definiciones y propiedades básicas de la teoría de retículos euclidianos. Los resultados presentados en este capítulo pueden encontrarse en Conway-Sloane [CS]

### 1.1. Definiciones Básicas

**Definición 1.1.1.** Un *retículo* (lattice)  $n$ -dimensional en un espacio euclídeo es un subconjunto  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}^m$  formado por todas las combinaciones enteras de  $n$  vectores linealmente independientes de  $\mathbb{R}^m$ , es decir

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i v_i : x_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

el conjunto  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base para  $\Lambda$ .

$$\begin{aligned} v_1 &= (v_{11}, v_{21}, \dots, v_{m1})^t \\ v_2 &= (v_{12}, v_{22}, \dots, v_{m2})^t \\ &\vdots \\ v_n &= (v_{1n}, v_{2n}, \dots, v_{mn})^t \end{aligned}$$

con  $v_{ij} \in \mathbb{R}$ . A partir de las coordenadas de los elementos de la base del retículo  $\Lambda$  se define la *Matriz Generadora*  $M$  del retículo como

$$M = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2m} \\ & & \ddots & \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nm} \end{pmatrix}$$

De acuerdo con la definición 1.1.1, los retículos son grupos discretos del espacio euclideo  $n$ -dimensional, mas aún, un retículo  $n$ -dimensional se puede considerar como  $\mathbb{Z}^n$  dotado de un producto escalar adecuado. Ver [Va, Cap 1].

La matriz generadora permite definir una matriz, fundamental en la caracterización de un retículo, cuyas entradas son los productos internos de los elementos de la base del retículo, tal matriz se denomina *Matriz de Gram*  $A = M^t M$ , así  $A = (v_i \cdot v_j)$ .

Cualquier elemento  $y \in \Lambda$  se puede expresar en términos de la matriz generadora  $M$ , dado que existe  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{Z}^n$  tal que  $y = x^t M$ .

Dado que las transformaciones rígidas del espacio  $\mathbb{R}^n$  que fijan el origen están dadas por el grupo  $O(n)$ . Podemos pensar que  $O(n)$  actúa en el conjunto de retículos de  $\mathbb{R}^n$ , así: para todo  $A \in O(n)$  y  $\Lambda$  un retículo en  $\mathbb{R}^n$ , denotamos por  $A \cdot \Lambda$  al conjunto  $\{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \Lambda\}$ ; diremos que dos retículos  $\Lambda$  y  $\Lambda'$  son *congruentes* (o *iguales*), si ellos están en la misma órbita por esta acción, es decir, si existe  $A \in O(n)$  tal que  $\Lambda' = A \cdot \Lambda$ , y en tal caso escribimos  $\Lambda' \equiv \Lambda$ .

Por otra parte, si dos retículos  $\Lambda$  y  $\Lambda'$  están relacionados por una homotecia, es decir, si existe  $t \in \mathbb{R}^+$ , tal que  $\Lambda' = t\Lambda$ , diremos que ellos son *semejantes* (o *equivalentes*), en tal caso escribimos  $\Lambda \cong \Lambda'$ . Para todos los problemas sobre retículos mencionados en la Introducción, no hace ninguna diferencia considerar retículos semejantes, por lo que se justifica el nombre *equivalentes*.

*Observación 1.1.2.* Si  $\Lambda$  y  $\Lambda'$  son semejantes, y  $M, M'$  son matrices generadoras para  $\Lambda$  y  $\Lambda'$  respectivamente, se cumple que  $M' = cUMB$  donde  $c > 0$ ,  $B \in O(n)$  y  $U \in GL_n(\mathbb{Z})$ . De manera similar, las matrices de Gram  $A$  y  $A'$  satisfacen  $A' = c^2 UAU^{\text{tr}}$ . Cuando los retículos son congruentes, se tiene  $A' = UAU^{\text{tr}}$ .

**Definición 1.1.3.** Sea  $\Lambda$  un retículo  $n$ -dimensional y  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  una base para  $\Lambda$ . Al conjunto

$$P := \left\{ \sum_{i=1}^n t_i v_i : 0 \leq t_i < 1 \right\}$$

se le llama *Paralelotopo fundamental* para  $\Lambda$ .

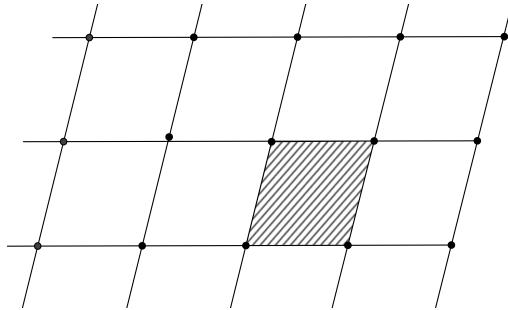


Figura 1.1: Paralelotopo Fundamental.

Todos los paralelotopos del retículo  $\Lambda$ , con matriz de Gram  $A$ , tiene igual volumen el cual llamamos *volumen del retículo*

$$\text{vol}(\Lambda) = \sqrt{\det(A)}$$

Dado que un retículo es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , este hereda las normas definidas en  $\mathbb{R}^n$ . En particular consideramos la norma euclidiana para calcular la norma de los vectores en  $\Lambda$ . Los vectores del retículo con norma mínima los llamamos *vectores de Voronoi* los cuales determinan las caras de la celda de Voronoi asociada al retículo.

**Definición 1.1.4.** Sea  $\Lambda$  un retículo  $n$ -dimensional.

- i. Decimos que  $\Lambda' \subseteq \Lambda$  es un subretículo de  $\Lambda$ , si  $\Lambda'$  es un retículo  $n$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$ .
- ii. El conjunto  $\Lambda^* = \{w \in \mathbb{R}^n : w \cdot v \in \mathbb{Z} \text{ para todo } v \in \Lambda\}$  es un retículo de  $\mathbb{R}^n$  llamado *retículo dual* de  $\Lambda$ .

**Definición 1.1.5.** Un retículo  $\Lambda$  es *entero*, si el producto interno de cualquier par de elementos de  $\Lambda$  es un número entero, es decir,  $\Lambda$  es un retículo entero si para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda$ ,  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{Z}$ . Adicionalmente, un retículo entero es *par*, si las normas de todos sus vectores son pares. Y un retículo entero es *unimodular* o *auto-dual* si su volumen es 1, o equivalentemente, si  $\Lambda = \Lambda^*$ .

**Teorema 1.1.6.** Sea  $\Lambda$  un retículo en  $\mathbb{R}^n$  con base  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , matriz generadora  $M$  y matriz de Gram  $A = M^t M$ . Se satisface:

- i.  $\Lambda^* = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{Z} \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y}^t M \in \mathbb{Z}^n\}$ .
- ii. La matriz generadora de  $\Lambda^*$  es  $(M^{-1})^t$ .
- iii. La matriz de Gram  $A$  de  $\Lambda^*$  es  $A^{-1}$ .
- iv.  $\det \Lambda^* = \frac{1}{\det \Lambda}$ .
- v.  $\Lambda$  es un retículo entero si y sólo si  $\Lambda \subseteq \Lambda^*$ .
- vi. Si  $\Lambda$  es un retículo entero, entonces  $\Lambda \subseteq \Lambda^* \subseteq \frac{1}{\det \Lambda} \Lambda = (\det \Lambda^*) \Lambda$ .
- vii. Si  $\Lambda$  es un retículo entero, entonces  $\Lambda$  es unimodular si y sólo si  $\det \Lambda = \pm 1$ .

Si  $\Lambda$  es un retículo,  $2\Lambda = \{2v : v \in \Lambda\}$  es un subretículo, el grupo cociente  $\Lambda/2\Lambda$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2^n$  por lo tanto tiene cardinal  $2^n$ . Este subretículo está muy relacionado con los llamados vectores de Voronoi de  $\Lambda$ , que juegan un papel esencial en la clasificación de los retículos de acuerdo a la estructura topológico-combinatoria de la celda de Voronoi asociada.

**Ejemplo 1.1.7.** ■ **El retículo cúbico  $n$ -dimensional  $\mathbb{Z}^n$ .** Dado  $\mathbb{Z}$  el conjunto de los números enteros, y  $n$  un número natural. El conjunto

$$\mathbb{Z}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n : x_i \in \mathbb{Z}\}$$

es un retículo llamado *retículo cúbico  $n$ -dimensional* o *retículo entero*. Una matriz generadora para este retículo es  $I_n$  la matriz identidad de orden  $n$ , que también hace las veces de matriz de Gram. Al retículo  $\mathbb{Z}^2$  se le suele llamar *retículo cuadrado*.

- Un retículo 2-dimensional es  $A_2 := \{(x_0, x_1, x_2)^t \in \mathbb{Z}^3 : x_0 + x_1 + x_2 = 0\}$ .

El conjunto  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  es una base para  $A_2$ , una matriz generadora viene dada por

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

y

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

una matriz de Gram.

- El caso  $n$ -dimensional  $A_n := \{(x_0, x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{Z}^{n+1} : x_0 + x_1 + \dots + x_n = 0\}$ . Los  $n$  vectores:  $(1, -1, 0, \dots, 0)^t, (1, 0, -1, 0, \dots, 0)^t, (1, 0, -1, 0, \dots, 0)^t, \dots, (1, 0, \dots, 0, -1)^t$  conforman una base para  $A_n$ . Una matriz generadora  $M$ , y una posible matriz de Gram  $A$ , son:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- **El retículo dual  $A_4^*$ .** Es uno de los retículos más usados en dimensión 4. Los vectores:

$$\left(\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right), \left(-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right), \left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right), \left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{1}{5}\right)$$

forman una base para  $A_4^*$ . La matriz generadora correspondiente a esta base es

$$M_{A_4^*} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

y la matriz de Gram

$$A_{A_4^*} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

El determinante del retículo es  $\det(A_4^*) = \frac{5^3}{5^4} = \frac{1}{5}$ .

- **El retículo  $D_n$ .** Para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$D_n := \{(x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{Z}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n \in 2\mathbb{Z}\}. \quad (1.3)$$

En otras palabras,  $D_n$  se obtiene al colorear los puntos de  $\mathbb{Z}^n$  de manera alternada, azul y amarillo, comenzando en el origen  $\mathbf{0}$ , como un tablero de damas, y tomando los puntos de color azul. Es por eso que a  $D_n$  algunas veces se le llama *the checkerboard retículo*. Una base típica para  $D_n$ , con  $n > 2$  es la que forman los vectores  $(-1, -1, 0, \dots, 0, 0)^t$ ,  $(1, -1, 0, \dots, 0, 0)^t$ ,  $(0, 1, -1, 0, \dots, 0)^t$ ,  $\dots$ ,  $(0, 0, 0, \dots, 1, -1)^t$ . La matriz generadora asociada a esta base es

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

y su determinante,  $\det(D_n) = 4$

- **El retículo  $D_4$ .** Una matriz generadora para  $D_4$  es

$$M_{D_4} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

La matriz de Gram asociada es:

$$A_{D_4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

- **El retículo dual  $D_n^*$ .** Una matriz generadora para  $D_n^*$  es

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Además  $\det(D_n^*) = 1/4$ .

Otros ejemplos de retículos. Consideramos los siguientes retículos 2-dimensionales:  $H$ , el *retículo hexagonal*, generado por los vectores  $(1, 0)^t$  y  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})^t$ , y  $A_2 := \{(x_0, x_1, x_2)^t \in \mathbb{Z}^3 : x_0 + x_1 + x_2 = 0\}$ .

El conjunto  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  es una base para  $A_2$ .

Las siguientes son matrices generadoras para  $H$  y  $A_2$  respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

y las matrices de Gram correspondientes son:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

estos dos retículos son equivalentes, se puede multiplicar  $H$  por  $\sqrt{2}$ , obteniendo así la matriz de Gram  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , que también se obtiene al tomar en  $A_2$  la base  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

**El retículo dual**  $A_n^*$  es el conjunto de puntos  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})^t \in \mathbb{R}^{n+1}$  tales que  $\sum_1^{n+1} x_i = 0$  y  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{Z}$  para todo  $\mathbf{y} \in A_n$ . Una matriz generadora de  $A_n^*$ ,

$$M = \begin{bmatrix} n & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n & \cdots & -1 & -1 \\ & & \vdots & & \\ -1 & -1 & \cdots & n & -1 \end{bmatrix}$$

y la matriz de Gram correspondiente

$$A = \begin{bmatrix} n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n & \cdots & -1 \\ & & \vdots & \\ -1 & -1 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

## 1.2. Lattices y formas cuadráticas.

**Definición 1.2.1.** Un polinomio homogéneo  $f$  de grado 2 en  $n$  variables es considerado una forma cuadrática, si sus coeficientes pertenecen a un cuerpo  $K$ , entonces

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j \text{ con } b_{ij} \in K.$$

Considerando  $a_{ij} = a_{ji} = \frac{b_{ij} + b_{ji}}{2}$ , la forma cuadrática se reescribe como

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = X^t A X$$

donde  $A = (a_{ij})$  es una matriz simétrica  $n \times n$  y  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ .

Si  $\mathcal{S}^n$  denota el espacio  $\binom{n+1}{2}$ -dimensional de las matrices simétricas reales de tamaño  $n \times n$ , la forma cuadrática correspondiente a la matriz simétrica  $A \in \mathcal{S}^n$  es  $A[X] = X^t A X$ , para  $X \in \mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.2.2.** Una forma cuadrática, respectivamente una matriz simétrica real  $A \in \mathcal{S}^n$ , es *definida positiva*, si  $A[x] > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Al espacio de las formas cuadráticas definidas positivas se lo suele denotar por  $\mathcal{S}_{>0}^n$ , esto es:

$$\mathcal{S}_{>0}^n = \{A \in \mathcal{S}^n : A[\mathbf{x}] > 0 \text{ para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} \quad (1.8)$$

Por el *Criterio de Sylvester*, una forma cuadrática  $A \in \mathcal{S}^n$  es definida positiva, si y sólo si, los menores principales de  $A$  son positivos, es decir si  $A_k = (a_{ij})_{i,j=1\dots k}$ , tienen determinante positivo, para todo  $k = 1, \dots, n$

$$\mathcal{S}_{>0}^n = \{A \in \mathcal{S}^n : \det(A_k) > 0, k = 1, \dots, n\}. \quad (1.9)$$

**Definición 1.2.3.** Dos formas cuadráticas  $A, A' \in \mathcal{S}_{>0}^n$  son *aritméticamente equivalentes* si existe una transformación unimodular entera  $U \in GL_n(\mathbb{Z})$  con  $GL_n = \{U \in \mathbb{Z}^{d \times d} : |\det U| = 1\}$  tal que  $A[U\mathbf{x}] = A'[\mathbf{x}]$ , para todo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$

Si  $A$  es una forma cuadrática definida positiva, ella es enviada al retículo  $\mathbb{Z}^n$  dotado del siguiente producto escalar, dados  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$  se define  $s_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x}^t A \mathbf{y}$ . Tal biyección entre retículos y formas cuadráticas definidas positivas aritméticamente equivalentes, determina una clase de retículos isométricos. A los retículos que están en la clase de  $(\mathbb{Z}^n, s_A)$  se les llama *asociados de  $A$* .

Dado que las bases de un retículo  $\Lambda$  son de la forma  $M' = MU$  con  $U \in GL_n(\mathbb{Z})$ , existe una relación uno a uno entre los retículos y una forma cuadrática aritméticamente equivalente  $A'$  de  $A = M^t M$  dado que  $A' = (M')^t M' = U^t M^t M U = U^t A U$ .

Si  $\Lambda$  es un retículo  $n$ -dimensional, y  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base de  $\Lambda$ , entonces la matriz de Gram  $A$  asociada a la base  $B$  determina una forma cuadrática definida positiva, con lo cual una clase de isometrías de retículos determina una clase de formas cuadráticas aritméticamente equivalentes.

Las formas cuadráticas definidas positivas permiten analizar de manera algebraica la estructura de las celdas de Voronoi, mientras que un estudio geométrico conviene hacerlo estudiando los retículos en si mismos; una combinación de ambos proporciona mayor información de la estructura topologica-combinatoria de la celdas de Voronoi.

### 1.3. Superbases y Parámetros de Selling

**Definición 1.3.1.** Dados  $\Lambda$  un retículo en  $\mathbb{R}^n$  y  $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  un conjunto  $n + 1$  vectores de  $\Lambda$  definimos:

- i.  $B$  es una *superbase* de  $\Lambda$ , si  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base de  $\Lambda$  y  $\sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i = 0$ .
- ii.  $B$  es una *superbase obtusa*, si  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_j < 0$  para  $\mathbf{v}_{i,j} \in B$ .
- iii. Una superbase obtusa se dice *estricta* si todos los productos internos son estrictamente negativos, o *laxa* en caso contrario.

**Nota:** A un retículo que admite una superbase obtusa, se le denomina *retículo Tipo I*.

**Ejemplo 1.3.2.** consideremos en dimensión 2 el retículo  $A_2 := \{(x_0, x_1, x_2)^t \in \mathbb{Z}^3 : x_0 + x_1 + x_2 = 0\}$ .

con base  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ , una superbase obtusa para  $A_2$  estaría dada por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**Definición 1.3.3.** Si  $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una superbase de un retículo  $\Lambda$ , a los  $\binom{n+1}{2}$  valores

$$p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \text{ con } 0 \leq i < j \leq n$$

se les llama *parámetros de Selling* de  $\Lambda$  relativo a la superbase  $B$ .

La matriz de Gram asociada a una superbase en terminos de los parámetros de Selling esta dada por

$$A = \begin{bmatrix} p_{0|12\dots n} & -p_{01} & \dots & -p_{0n} \\ -p_{01} & p_{1|02\dots n} & \dots & -p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_{0n} & -p_{1n} & \dots & p_{n|01\dots n-1} \end{bmatrix}$$

donde  $p_{i|jk\dots l} = p_{ij} + p_{ik} + \dots + p_{il}$  con  $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$  para  $0 \leq i < j \leq n$ .

Sea  $A \in \mathcal{S}_{>0}^n$ , si la forma cuadrática asociada al retículo está en forma reducida, diremos que los parámetros de Selling y la superbase son reducidos.

En el siguiente teorema se muestra una estrecha relación entre los parámetros de Selling y la norma cuadrada de un vector

**Teorema 1.3.4.** (*Selling*). Sea  $\Lambda$  un retículo  $n$ -dimensional y  $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  una superbase de  $\Lambda$  con parámetros de Selling asociados  $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$  para  $0 \leq i < j \leq n$ , y sea  $\mathbf{X} = \sum_{i=0}^n x_i \mathbf{v}_i$  con  $x_i \in \mathbb{R}$ , entonces la norma de  $\mathbf{X}$ ,  $N(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}$  tiene la forma:

$$N(\mathbf{X}) = \sum_{i < j} p_{ij} (x_i - x_j)^2$$



*Demostración.* Dado que  $\mathbf{X} = \sum_{i=0}^n x_i \mathbf{v}_i$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
 N(\mathbf{X}) &= \left( \sum_{i=0}^n x_i \mathbf{v}_i \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^n x_i \mathbf{v}_i \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n x_i^2 \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i + 2 \sum_{i < k} x_i x_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_k \\
 &= \sum_{i=0}^n x_i^2 \mathbf{v}_i \cdot \left( \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_j \right) - 2 \sum_{i < k} p_{ik} x_i x_k \\
 &= \sum_{i=0}^n x_i^2 \sum_{j \neq i} p_{ij} - 2 \sum_{i < k} p_{ik} x_i x_k \\
 &= \sum_{i < j} p_{ij} (x_i^2 + x_j^2) - 2 \sum_{i < k} p_{ik} x_i x_k \\
 &= \sum_{i < k} p_{ik} (x_i^2 + x_k^2 - 2x_i x_k) \\
 &= \sum_{i < k} p_{ik} (x_i - x_k)^2
 \end{aligned}$$

□

A partir de los parámetros de Selling es posible describir algunos objetos asociados a retículos por ejemplo el determinante.

**Determinante para Retículos en dimensión 2.** Si  $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  es una superbase para un retículo  $\Lambda$  en  $\mathbb{R}^2$ , La matriz de Gram correspondiente a la superbase  $B$  es

$$A' = \begin{bmatrix} p_{01} + p_{02} & -p_{01} & -p_{02} \\ -p_{01} & p_{01} + p_{12} & -p_{12} \\ -p_{02} & -p_{12} & p_{02} + p_{12} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

y el determinante del retículo es

$$\det(\Lambda) = p_{01}p_{02} + p_{01}p_{12} + p_{02}p_{12}. \quad (1.11)$$

**Determinante para Retículos en dimensión 3.** La matriz de Gram asociada a la superbase  $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ , de un retículo 3 dimensional es

$$A' = \begin{bmatrix} p_{01} + p_{02} + p_{03} & -p_{01} & -p_{02} & -p_{03} \\ -p_{01} & p_{01} + p_{12} + p_{13} & -p_{12} & -p_{13} \\ -p_{02} & -p_{12} & p_{02} + p_{12} + p_{23} & -p_{23} \\ -p_{03} & -p_{13} & -p_{23} & p_{03} + p_{13} + p_{23} \end{bmatrix}$$

y el determinante del retículo es:

$$\begin{aligned}
 \det(\Lambda) &= p_{01}p_{02}p_{03} + p_{01}p_{02}p_{13} + p_{01}p_{03}p_{12} + p_{02}p_{03}p_{12} + p_{02}p_{03}p_{13} + p_{01}p_{02}p_{23} + \\
 &\quad p_{01}p_{12}p_{13} + p_{01}p_{03}p_{23} + p_{02}p_{12}p_{13} + p_{03}p_{12}p_{13} + p_{01}p_{12}p_{23} + p_{01}p_{13}p_{23} + \\
 &\quad p_{02}p_{12}p_{23} + p_{02}p_{13}p_{23} + p_{03}p_{12}p_{23} + p_{03}p_{13}p_{23}.
 \end{aligned} \quad (1.12)$$

**Determinante para Retículos en dimensión 4.** El determinante tiene 125 sumandos.

El determinante viene dado por la expresión:

$$\det(A) = \sum^{(60)} p_{ij} p_{jk} p_{kl} p_{lm} + \sum^{(60)} p_{ij} p_{jk} p_{kl} p_{jm} + \sum^{(5)} p_{ij} p_{ik} p_{il} p_{im} \quad (1.13)$$

Una expresión general puede conseguirse haciendo uso de propiedades básicas de los árboles generadores de grafos conexos. Pero no las incluimos aquí por razones técnicas.

## 1.4. Retículos Tipo I en dimensiones bajas.

Conway en [Co] vuelven a demostrar con otros métodos que todo retículo de dimesión menor o igual que 3 es de Tipo I.

Así por ejemplo. El caso 1-dimensional es claro, note que una matriz de Gram asociada a un tal retículo es de la forma  $A = (a)$ , y  $\mathbf{v}_1$  un generador de  $\Lambda$  con  $N(\mathbf{v}_1) = a$ , entonces, si  $\mathbf{v}_0 := -\mathbf{v}_1$ ,  $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1\}$  es una superbase obtusa de  $\Lambda$ .

Para el caso 2-dimensional. Considere  $\Lambda$  un tal retículo, generado por los vectores  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , si la matriz de Gram reducida asociada es

$$A = \begin{bmatrix} a & -h \\ -h & b \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

con  $0 \leq 2h \leq a \leq b$ , al definir  $\mathbf{v}_0 := -\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ , el conjunto  $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  es una superbase obtusa para  $\Lambda$  cuyos parámetros de Selling reducidos asociados son  $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ , con  $0 \leq i < j \leq 2$  y se cumple:

$$a = p_{01} + p_{12}, \quad h = p_{12}, \quad b = p_{02} + p_{12}$$

En éste caso los vectores de Voronoi correspondientes son:  $\pm\mathbf{v}_0, \pm\mathbf{v}_1, \pm\mathbf{v}_2$ .

Si  $h = p_{12} \neq 0$ , no hay más vectores de Voronoi, y la celda de Voronoi asociada es hexagonal. Mientras que si  $p_{12} = 0$ ,  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  también resultan ser vectores de Voronoi, solo que ellos no aportan aristas a la celda y la misma tiene forma rectangular.

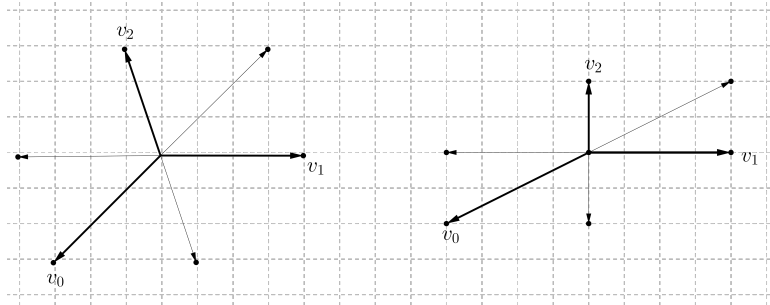


Figura 1.2: Vectores de Voronoi Estrictos y Laxos.

Voronoi en sus memorias, [Vo], demostró la existencia de una superbase obtusa para todo retículo 3-dimensional, Este mismo hecho fue probado en [Co] de una manera muy elegante, un bosquejo de tal prueba, la cual hace uso de plano de Fano y permite una descripción gráfica del método

empleado, se presenta a continuación. Técnicamente lo que se hace es método de reducción de formas cuadráticas ternarias definidas positivas.

**Teorema 1.4.1** (Voronoi). *Todo retículo 3-dimensional es de Tipo I.*

Un *plano de Fano*, es un plano proyectivo con 7 puntos y 7 líneas, cada una de las cuales tiene 3 puntos, con la propiedad que dados dos puntos cualesquiera siempre hay una línea que los contiene. El plano de Fano se suele representar con un triángulo equilátero en el que se han dibujado los tres alturas y el círculo inscrito. Las líneas del plano son los lados del triángulo junto con las tres alturas y el círculo inscrito, y los puntos del plano son las intersecciones de estas líneas, tal como se muestra en la figura.

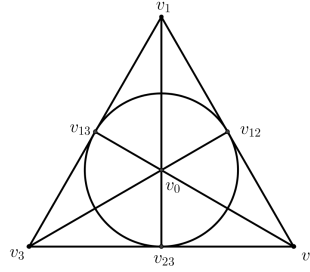
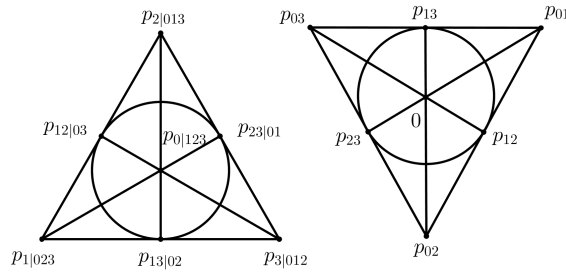


Figura 1.3: Plano de Fano.

Sea  $\Lambda$  un retículo 3-dimensional, y  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  una base de  $\Lambda$ , llamamos *vectores de Voronoi putativos*, a los siete vectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ , uno por cada subconjunto no vacío de  $\{1, 2, 3\}$ , y llamamos a sus normas  $N(\mathbf{v}_1), N(\mathbf{v}_2), \dots, N(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$  *Vonormas putativas*. Así mismo, llamamos *Conormas putativas* para la superbase  $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ , con  $\mathbf{v}_0 = -(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$ , a los seis parámetros  $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$  con  $0 \leq i < j \leq 3$ , junto con el 0.

Las vonormas putativas se marcan con los puntos de un plano de Fano, así como las conormas putativas complementadas con el  $\mathbf{0}$ , tal como lo muestra la Figura 1.4

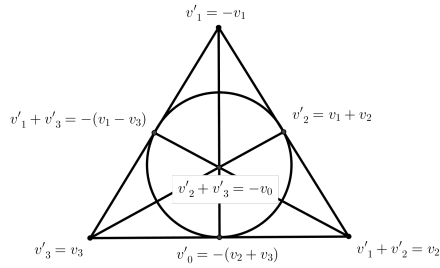


Supongamos que una conorma es negativa, digamos  $p_{13} = -\epsilon$ , con  $\epsilon > 0$ , si definimos una *superbase adyacente*:  $B' = \{\mathbf{v}'_0, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\}$  como:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_0 &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}'_1 &= -\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}'_3 &= \mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

y los vectores de Voronoi resultantes, además de sus negativos, son:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}'_0 &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1; \\
 \mathbf{v}'_1 &= -\mathbf{v}_1; \\
 \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \\
 \mathbf{v}'_3 &= \mathbf{v}_3; \\
 \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{v}_2; \\
 \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_3 &= -(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3); \\
 \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}'_3 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3;
 \end{aligned}$$



6 de estos vectores también son, salvo posiblemente el signo, vectores de Voronoi en la superbase inicial. Dado que  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_0 + 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  con la nueva superbase tenemos

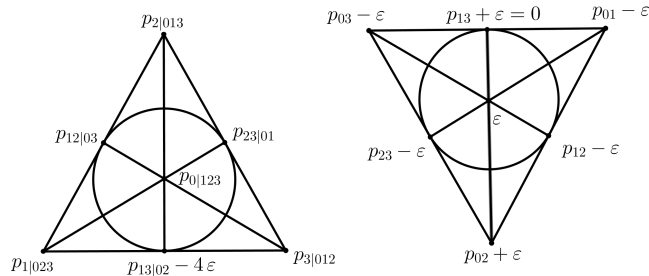
$$\begin{aligned}
 N(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) &= p_{01} + p_{03} + p_{12} + 4p_{13} + p_{23} \\
 &= (p_{01} + p_{12}) + (p_{03} + p_{23}) + 4p_{13} \\
 &= N(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) + 4p_{13}
 \end{aligned}$$

y como  $p_{13} < 0$ , se sigue que  $N(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) < N(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3)$ . Con lo cual el vector  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$  es más corto que  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$

Los parámetros de Selling, o conormas, correspondientes a la nueva superbase son:

$$\begin{aligned}
 p'_{01} &= p_{12} - \epsilon; & p'_{12} &= p_{01} - \epsilon; \\
 p'_{02} &= p_{02} + \epsilon; & p'_{13} &= \epsilon; \\
 p'_{03} &= p_{03} - \epsilon; & p'_{23} &= p_{23} - \epsilon;
 \end{aligned}$$

Los nuevos parámetros se distribuyen en un plano de Fano de la manera.



Sólo una vonorma putativa cambió,  $N(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3)$  y disminuyó en  $4\epsilon$ , por otro lado, tres conormas putativas sobre una misma línea se incrementan en  $\epsilon$ , mientras que las demás se disminuyen en  $\epsilon$ . La

línea de conormas que se incrementa en  $\epsilon$  es precisamente la que une las posiciones de las conormas que son 0.

En realidad  $\epsilon$  está determinado por la condición: Después de aplicado el proceso, una de las nuevas conormas será 0. Esta condición permite establecer un algoritmo de reducción para retículos en dimensión 3. Explicamos el método con un ejemplo.

**Ejemplo 1.4.2.** Consideremos un retículo  $\Lambda$  con matriz de Gram relativa a la base  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  dada por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

adjuntamos el vector  $\mathbf{v}_0 = -(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$  de tal manera que la matriz de Gram aumentada es:

$$A' = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 2 & 1 \\ -8 & 2 & 5 & 1 \\ -8 & 1 & 1 & 6 \\ 21 & -6 & -8 & -8 \end{bmatrix}$$

Dado que algunos productos internos son positivos, la superbase  $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  no es obtusa. Las conormas putativas para este caso son:  $p_{01} = 6$ ,  $p_{02} = 8$ ,  $p_{03} = 8$ ,  $p_{12} = -2$ ,  $p_{13} = -1$  y  $p_{23} = -1$ , las cuales se distribuyen en el plano de fano dual que se muestra en la Figura 1.4.

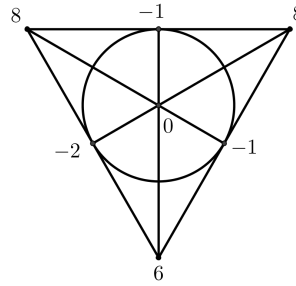
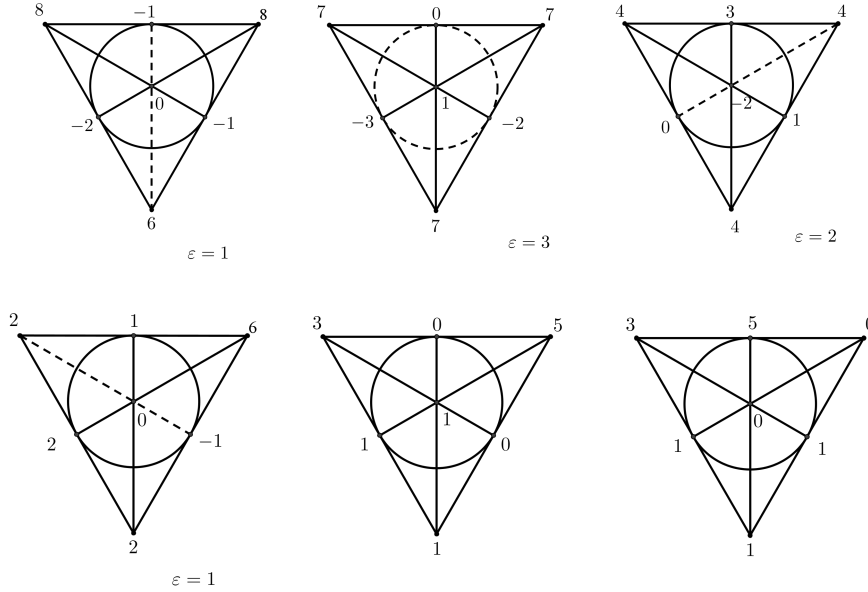


Figura 1.4: Conormas putativas.

Ahora aplicamos el proceso de reducción. De este modo, después de 5 pasos se obtienen las conormas reducidas.



De todo lo anterior, las conormas reducidas, respectivamente los parámetros de Selling reducidos, del retículo son:  $p_{01} = 1$ ,  $p_{02} = 3$ ,  $p_{03} = 0$ ,  $p_{12} = 1$ ,  $p_{13} = 5$  y  $p_{23} = 1$

En general el proceso descrito siempre produce una superbase obtusa del retículo. Para más detalles ver [Co], [CS1].

Como ya hemos dicho, los retículos en dimensiones 1,2 y 3 son de Tipo I o degeneraciones de ellos, conseguidas al hacer cierta cantidad de parámetros de Selling iguales a cero, pero sin que el retículo pierda dimensión. En dimensiones superiores esto ya no ocurre. Se sabe que en dimensión 4 existen tres familias de retículos que se suelen denominar de Tipo I, II y III; en este trabajo nos centramos en estudiar las celdas de Voronoi asociadas a retículos de Tipo I obtenidas de degeneraciones de la celda primitiva  $\pi_4$  de esta clase que esta ligada a retículos que admiten una superbase obtusa estricta. A estos celdas también se les conoce como *Zonotopales*.

## 1.5. Tipos de coordenadas asociadas.

A manera de ambientación. Dado un  $\Lambda$  retículo 3-dimensional y una superbase  $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ , es posible determinar las coordenadas de cada elemento  $t \in \mathbb{R}^3$  en términos de la superbase, en este sentido, debido a que las caras de la celda de Voronoi están determinadas por los vectores de Voronoi de la misma, es posible determinar un sistema de coordenadas que permita etiquetar los vértices, las aristas y las caras de la celda.

En general, sea  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  una base fija de un retículo  $n$ -dimensional  $\Lambda$ , a cada vector  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$  se lo puede representar al menos de tres formas distintas:

- i. En *coordenadas euclídeas*, es decir, como un punto de  $\mathbb{R}^n$  escrito en términos de la base canónica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , en tal caso  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)^t = t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2 + \dots + t_n\mathbf{e}_n$ .
- ii. En  *$\mathbf{x}$ -coordenadas* asociadas a la base  $B$ , donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$  es tal que  $\mathbf{t} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n$ . Si  $M$  es la matriz generadora de  $\Lambda$  asociada a la base  $B$ , entonces  $\mathbf{t} = M\mathbf{x}$

- iii. Si  $A$  es la matriz de Gram asociada a la base  $B$ , definimos las **y-coordenadas** de  $\mathbf{t}$ , como  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ . Nótese que

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= A\mathbf{x} \\ &= M^t M \mathbf{x} \\ &= M \mathbf{t}\end{aligned}$$

las **y-coordenadas** de un punto  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ , son los productos internos del vector  $\mathbf{t}$  con los elementos de la base  $B$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{t}, \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{t}, \dots, \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{t})^t \quad (1.15)$$

**Ejemplo 1.5.1.** Sea  $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  una base de  $D_3$  y  $T = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  un vector en  $\mathbb{R}^3$ . Las **x-coordenadas** de  $t$  satisfacen la igualdad  $t = Mx$  con  $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  son  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Por otro lado, las **y-coordenadas** estarían dadas por  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

*Observación 1.5.2.* Si consideramos una superbase en lugar de una base del retículo, hablaremos de coordenadas aumentadas o extendidas.

Estas formas de escribir los vectores de  $\mathbb{R}^n$ , y en especial la que corresponde a las **y-coordenadas** aumentadas, las usaremos para describir completamente cada una de las componentes de la celda de Voronoi de un retículo en dimensiones bajas.

Si  $A$  es una matriz de Gram de un retículo  $\Lambda$ , podemos escribir la norma de un elemento  $\mathbf{t}$  de  $\Lambda$ , en términos de sus **x-coordenadas**, es decir  $\mathbf{t} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \mathbf{v}_n$  con  $x_i \in \mathbb{Z}$ ,  $N(\mathbf{t})$  tiene la forma

$$\begin{aligned}N(\mathbf{t}) &= \mathbf{t}^t \mathbf{t} \\ &= \mathbf{x}^t M M^t \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^t A \mathbf{x}\end{aligned} \quad (1.16)$$

Dado que  $A$  es invertible y  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ :

$$\begin{aligned}N(\mathbf{t}) &= \mathbf{x}^t A \mathbf{x} \\ &= \mathbf{y}^t A^{-1} \mathbf{y}\end{aligned} \quad (1.17)$$

## 1.6. Vectores y celdas de Voronoi

Asociado a cada punto  $\mathbf{v}$  de un retículo, se encuentra su *celda de Voronoi* correspondiente, esto es: la región del espacio euclídeo que contiene al retículo, cuyos puntos están a una distancia de  $\mathbf{v}$  menor o igual que de cualquier otro punto del retículo. Es decir, dado un retículo  $\Lambda$  y  $\mathbf{v} \in \Lambda$ , se define la celda de Voronoi  $S(\mathbf{v})$  como

$$S(\mathbf{v}) := \{x \in \mathbb{R}^n : N(x - \mathbf{v}) \leq N(x - \mathbf{w}), \text{ para todo } \mathbf{w} \in \Lambda\}.$$

Al igual que un paralelotopo fundamental, la celda de Voronoi provee un embañosamiento o tiling del espacio y permite reconstruir el retículo a partir de traslaciones. En dimensión 2, hay esencialmente dos tipos o formas de celdas de Voronoi asociadas al retículo. Una es hexagonal y la otra rectangular. En dimensión 3 hay cinco tipos de celdas de Voronoi y en dimensión 4 hay 52 tipos de celdas de Voronoi asociadas al retículo.

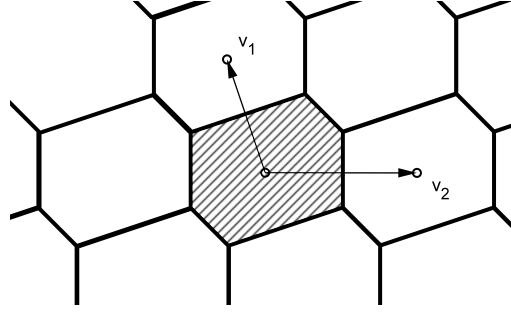


Figura 1.5: Teselación en Celdas de Voronoi.

**Definición 1.6.1.** Sea  $\Lambda$  un retículo  $n$ -dimensional, decimos que un vector  $\mathbf{v} \in \Lambda$  es un *vector de Voronoi*, si el hiperplano

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}) \right\} \quad (1.18)$$

tiene intersección no vacía con  $S(\mathbf{0})$ , la celda de Voronoi de  $\Lambda$  en torno al origen. Además, decimos que un vector de Voronoi es *estricto* o *relevante*, si la intersección anterior es una *facet* o cara  $(n-1)$ -dimensional de  $S(\mathbf{0})$ , en caso contrario decimos que es un vector de Voronoi *laxo* o *irrelevante*.

**Teorema 1.6.2** (Vectores de Voronoi). *Sea  $\Lambda$  un retículo en  $\mathbb{R}^n$ , y  $\mathbf{v}$  un vector no cero de  $\Lambda$ , entonces*

- i.  $\mathbf{v}$  es un vector de Voronoi si y sólo si  $\mathbf{v}$  es uno de los vector más corto en la clase  $\mathbf{v} + 2\Lambda$ .
- ii.  $\mathbf{v}$  es un vector de Voronoi estricto si y sólo si  $\mathbf{v}$  y  $-\mathbf{v}$  son los únicos vectores más cortos en  $\mathbf{v} + 2\Lambda$ .

*Demostración.* i. Supongamos que  $\mathbf{v}$  es un vector de Voronoi, y supongamos además que existe  $\mathbf{w} \in \Lambda$  tal que  $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in 2\Lambda$  y  $N(\mathbf{w}) < N(\mathbf{v})$  entonces  $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}+\mathbf{w}}{2}$  y  $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}-\mathbf{w}}{2}$  también son vectores de  $\Lambda$ . Sea  $\mathbf{P}$  tal que  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{t} \leq \frac{1}{2}\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}$  y  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{u} \leq \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ , pero esto implica que  $N(\mathbf{v}) \leq N(\mathbf{w})$ , lo que claramente es imposible.

Recíprocamente, supongamos que  $\mathbf{v}$  es un vector corto en la clase  $\mathbf{v} + 2\Lambda$ , pero no un vector de Voronoi. Entonces, existe  $\mathbf{w} \in \Lambda$ , tal que  $\frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} > \frac{1}{2}\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$ , así que  $N(\mathbf{v} - 2\mathbf{w}) < N(\mathbf{w})$  lo cual es imposible.

- ii. Razonemos por el absurdo, supongamos que  $\mathbf{v}$  es un vector de Voronoi estricto y que  $\pm\mathbf{v}$  no son los únicos vectores más cortos en la clase  $\mathbf{v} + 2\Lambda$ , por lo tanto, existe  $\mathbf{w} \in \Lambda$ , tal que  $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in 2\Lambda$ ,  $\mathbf{w} \neq \pm\mathbf{v}$  y  $N(\mathbf{v}) = N(\mathbf{w})$ , en consecuencia los vectores  $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}+\mathbf{w}}{2}$  y  $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}-\mathbf{w}}{2}$ , también son elementos de  $\Lambda$ . Si  $x \in H_{\mathbf{t}} \cap H_{\mathbf{u}}$  entonces  $x \cdot \mathbf{t} \leq \frac{1}{2}N(\mathbf{t})$  y  $x \cdot \mathbf{u} \leq \frac{1}{2}N(\mathbf{u})$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} x \cdot \mathbf{t} &= \frac{\mathbf{v}+\mathbf{w}}{2} \leq \frac{1}{2}N\left(\frac{\mathbf{v}+\mathbf{w}}{2}\right) \\ x \cdot \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{v}-\mathbf{w}}{2} \leq \frac{1}{2}N\left(\frac{\mathbf{v}-\mathbf{w}}{2}\right) \end{aligned}$$



de aquí que

$$\begin{aligned} x \cdot \mathbf{v} + x \cdot \mathbf{w} &\leq \frac{N(\mathbf{w}) + N(\mathbf{v})}{4} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{2} \\ x \cdot \mathbf{v} - x \cdot \mathbf{w} &\leq \frac{N(\mathbf{w}) + N(\mathbf{v})}{4} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{2} \end{aligned}$$

al sumar las dos últimas expresiones, obtenemos

$$2x \cdot \mathbf{v} \leq \frac{N(\mathbf{w}) + N(\mathbf{v})}{2} = N(\mathbf{v}),$$

o lo que es lo mismo  $x \cdot \mathbf{v} \leq \frac{1}{2}N(\mathbf{v})$ , es decir,  $x \in H_{\mathbf{v}}$ , con lo cual  $H_{\mathbf{t}} \cap H_{\mathbf{u}} \subseteq H_{\mathbf{v}}$ , y así el semiespacio  $H_{\mathbf{v}}$  no es indispensable en la construcción de  $S(\mathbf{0})$ , o lo que es lo mismo,  $\mathbf{v}$  no es un vector de Voronoi estricto.

Razonemos nuevamente por el absurdo, si  $\mathbf{v}$  no es un vector de Voronoi estricto, entonces el semiespacio  $H_{\mathbf{v}}$  no aporta nada en la construcción de la celda de Voronoi de  $S(\mathbf{0})$ , entonces  $\frac{1}{2}\mathbf{v}$  esta fuera o sobre el borde de algún semiespacio  $H_{\mathbf{w}}$  con  $\mathbf{w} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}, \pm\mathbf{v}\}$ , así que  $\frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \geq \frac{1}{2}\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$ , o lo que es lo mismo,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - N(\mathbf{w}) \geq 0$ .

Al considerar el vector  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ , que claramente es un vector en la clase  $\mathbf{v} + 2\Lambda$ , tenemos que

$$\begin{aligned} N(\mathbf{v}') &= N(\mathbf{v} - 2\mathbf{w}) \\ &= N(\mathbf{v}) + 4N(\mathbf{w}) - 4\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \\ &= N(\mathbf{v}) + 4(N(\mathbf{w}) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \\ &\leq N(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

es decir,  $\mathbf{v}'$  es un vector en  $\mathbf{v} + 2\Lambda$ , más corto o igual que  $\pm\mathbf{v}$ , lo cual es imposible.

□

**Teorema 1.6.3.** *Sea  $\Lambda$  es un retículo  $n$ -dimensional de Tipo I, y  $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  una superbase obtusa para  $\Lambda$ , y sean  $S$  un subconjunto propio de  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ , y  $\bar{S}$  su complemento. Entonces:*

- i. *La suma  $\mathbf{v}_S = \sum_{i \in S} \mathbf{v}_i$  es un vector de Voronoi de  $\Lambda$ .  $\mathbf{v}_S$  y  $\mathbf{v}_{\bar{S}} = -\mathbf{v}_S$  son congruentes módulo  $2\Lambda$*
- ii. *Los vectores  $\mathbf{v}_S$  son todos estrictos si y sólo si la superbase es estricta.*

*Demostración.* i. Sabemos que si  $\mathbf{v} = \sum_{i=0}^n m_i \mathbf{v}_i \in \Lambda$ , con  $m_i \in \mathbb{Z}$ , su norma esta dada por

$$N\left(\sum_{i=0}^n m_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i < j} p_{ij}(m_i - m_j)^2.$$

Ahora bien, dado que  $\sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ , el vector  $\mathbf{v}$  no cambia si a todos a los coeficientes  $m_i$ , se les suma la misma cantidad, y la clase  $\mathbf{v} + 2\Lambda$ , tampoco cambia si a los  $m_i$  se los incrementa en enteros pares, de este modo, un representante de una clase de  $\Lambda/2\Lambda$  tiene norma mínima si todos valores pares de  $m_i$  se cambian por 0, y los valores impares por 1. En consecuencia, los vectores de la forma  $\mathbf{v}_S = \sum_{i \in S} \mathbf{v}_i$ , con  $S$  un subconjunto propio de  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ , son vectores de Voronoi.

- ii. Si  $p_{ij} > 0$  para todo  $0 \leq i < j \leq n$ , y suponemos además que  $\mathbf{v} = \sum_{i=0}^n m_i \mathbf{v}_i$ , con  $\min(m_0, m_1, \dots, m_n) = 0$ , entonces la norma de  $\mathbf{v}$  se hace mínima sólo si todos los  $m_i$  son 0 ó 1.

□

El teorema anterior implica que a partir de una superbase obtusa del retículo es posible hallar los vectores de Voronoi que determinan la celda. Por otro lado, la norma de los vectores de Voronoi viene dada por el siguiente corolario.

**Corolario 1.6.4** (Norma de vectores de Voronoi en retículos de Tipo I.). *Si  $\Lambda$  es un retículo de Tipo I y  $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una superbase obtusa de  $\Lambda$  con parámetros de Selling  $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ , para  $0 \leq i < j \leq n$ , entonces las normas de los vectores de Voronoi de  $\Lambda$  vienen dadas por:*

$$N(\mathbf{v}_S) = \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} p_{ij} \quad (1.19)$$

Donde  $S$  recorre todos los subconjunto propios de  $B$ .

*Demostración.* Sea  $S \subset B$ , por la parte i del teorema anterior, sabemos que  $\mathbf{v}_S$  es un vector de Voronoi y como  $\mathbf{v}_S = -\mathbf{v}_{\bar{S}}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} N(\mathbf{v}_S) &= \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{v}_S \\ &= -\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{v}_{\bar{S}} \\ &= \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} p_{ij}. \end{aligned}$$

□

## Capítulo 2

# Clasificación de retículos.

Es posible hacer una descripción detallada de la estructura topologico-combinatoria de la celda de Voronoi en función de los parámetros de Selling reducidos asociados al retículo. Una descripción general de las celdas de voronoi en estas dimensiones se encuentran en los trabajos de Conway.

Como ya hemos dicho en dimensión 2, hay esencialmente dos tipos de celdas de Voronoi asociadas a retículos, la primitiva que es hexagonal y una rectangular como en el caso de  $\mathbb{Z}^2$ .

En dimensión 3 hay cinco clases de celdas de Voronoi, sólo una de ellas es primitiva y corresponde al Octaedro truncado o permutohedro 3-dimensional. Ver [Co], [Fed], [Va], [Vo] entre otros.

En el presente capítulo haremos un recorrido ligero por esas clasificaciones usaremos técnicas similares a [Co] que sirvan de inspiración para una acercamiento del mismo problema en dimensión 4.

### 2.1. Descripción celda de Voronoi dimensión 2.

En los retículos de dimensión 2 la celda de Voronoi primitiva se caracteriza por la propiedad que en el correspondiente embaladosamiento se encuentran en cada vértice el mínimo número de polígonos posibles, tres en este caso. La celda de Voronoi primitiva 2-dimensional es un hexágono. Si el  $\det(\Lambda)$  es diferente de cero las celdas de Voronoi determinan una teselación del retículo 2-dimensional.

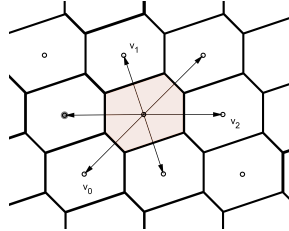


Figura 2.1: Celda Primitiva 2-d.

Sea  $\Lambda$  un retículo 2-dimensional generado por dos vectores obtusos  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ , si consideramos  $\mathbf{v}_0 = -\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ , el conjunto  $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  se define como una superbase obtusa de  $\Lambda$  y los vectores de Voronoi asociados al retículo son  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ . A

partir de los vectores de Voronoi se consideran los parámetros de Selling asociados a  $\Lambda$  como  $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ , con  $0 \leq i < j \leq 2$ .

La matriz de Gramm reducida asociada a  $\Lambda$  esta dada por

$$A = \begin{pmatrix} p_{01} + p_{12} & -p_{12} \\ -p_{12} & p_{02} + p_{12} \end{pmatrix}$$

Si ningun parámetro de Selling es igual a cero, las caras de la celda primitiva del retículo se determinan por cada uno de los vectores de Voronoi, y la intersección entre los segmentos perpendiculares que bisecan a cada vector de Voronoi forma cada arista. Debido a que los vectores en  $B$  son obtusos entre sí, la celda de Voronoi primitiva cuenta con 6 caras y 6 vértices.

Representaremos por  $F_{i|jk}$  la cara determinada por el vector  $\mathbf{v}_i$  y  $F_{ij|k}$  la cara determinada por el vector  $\mathbf{v}_k$  para toda permutación de  $\{1, 2, 3\}$ . Las caras adyacentes a  $F_{i|jk}$  son  $F_{ij|k}$  y  $F_{ik|j}$ , y las caras adyacentes a  $F_{ij|k}$  son  $F_{i|jk}$  y  $F_{j|ik}$ . Dado el origen de cada una de las caras y la simetría de los vectores,  $F_{i|jk}$  y  $F_{jk|i}$  son caras opuestas respecto al origen.

Denotaremos por  $p_{ijk}$  el vértice formado por la intersección de las caras  $F_{i|jk}$  y  $F_{ij|k}$  para  $\{i, j, k\}$  cualquier permutación de  $\{1, 2, 3\}$ . Los vectores de Voronoi, las caras y vértices de la celda primitiva se relacionan entre sí,

<i>Vector de Voronoi</i>	<i>Cara - Arista</i>	<i>Vértice</i>
$\mathbf{v}_0$	$F_{0 12}$	$p_{012}, p_{021}$
$\mathbf{v}_1$	$F_{1 02}$	$p_{102}, p_{120}$
$\mathbf{v}_2$	$F_{2 01}$	$p_{201}, p_{210}$
$-\mathbf{v}_0$	$F_{12 0}$	$p_{120}, p_{210}$
$-\mathbf{v}_1$	$F_{02 1}$	$p_{021}, p_{201}$
$-\mathbf{v}_2$	$F_{01 2}$	$p_{012}, p_{102}$

las  $\mathbf{y}$ -coordenadas de cada uno de los vértices en la celda primitiva son:

$$p_{012} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} \\ -p_{01} + p_{12} \\ -p_{02} - p_{12} \end{pmatrix} \quad p_{021} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} \\ -p_{01} - p_{12} \\ p_{02} - p_{12} \end{pmatrix} \quad p_{102} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_{01} + p_{02} \\ p_{01} + p_{12} \\ -p_{02} - p_{12} \end{pmatrix}$$

$$p_{120} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_{01} - p_{02} \\ p_{01} + p_{12} \\ p_{02} - p_{12} \end{pmatrix} \quad p_{201} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} - p_{02} \\ -p_{01} - p_{12} \\ p_{02} + p_{12} \end{pmatrix} \quad p_{210} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_{01} - p_{02} \\ p_{01} - p_{12} \\ p_{02} + p_{12} \end{pmatrix}$$

$$p_{012} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} \\ -p_{01} + p_{12} \\ -p_{02} - p_{12} \end{pmatrix}$$

Denotaremos por  $e_{ij}$  la arista formada por  $F_{k|ij}$  y  $-e_{ij}$  la arista formada por  $F_{ij|k}$  para  $i, j, k$  cualquier permutación de  $\{1, 2, 3\}$ ,

las  $\mathbf{y}$ -coordenadas de las aristas son

$$\begin{aligned}
e_{01} &= \begin{pmatrix} p_{01} \\ -p_{01} \\ 0 \end{pmatrix} & e_{02} &= \begin{pmatrix} p_{02} \\ 0 \\ -p_{02} \end{pmatrix} & e_{12} &= \begin{pmatrix} 0 \\ p_{12} \\ -p_{12} \end{pmatrix} & -e_{01} &= \begin{pmatrix} -p_{01} \\ p_{01} \\ 0 \end{pmatrix} \\
-e_{02} &= \begin{pmatrix} -p_{02} \\ 0 \\ p_{02} \end{pmatrix} & -e_{12} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -p_{12} \\ p_{12} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

*Observación 2.1.1.* En general las  $\mathbf{y}$ -coordenadas de los vértices determinados por el vector  $\mathbf{v}_i$  con  $i \in \{0, 1, 2\}$  están dadas por  $y_i = \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ik})$ ,  $y_j = \frac{1}{2}(-p_{ij} + p_{jk})$ ,  $y_k = \frac{1}{2}(-p_{ik} - p_{jk})$  donde  $i, j, k$  es un reordenamiento de los índices 0, 1, 2.

Adicionalmente, las  $\mathbf{y}$ -coordenadas de la arista  $e_{ij}$  formada por la cara  $F_{k|ij}$  están dadas por  $y_i = p_{ij}$ ,  $y_j = -p_{ij}$ ,  $y_k = 0$  donde  $i, j, k$  es un reordenamiento de los índices 0, 1, 2.

Las normas de las aristas estan dadas por

$$|\pm e_{01}| = p_{01} \sqrt{\frac{\Delta_{01}}{\Delta}} \quad |\pm e_{02}| = p_{02} \sqrt{\frac{\Delta_{02}}{\Delta}} \quad |\pm e_{12}| = p_{12} \sqrt{\frac{\Delta_{12}}{\Delta}}$$

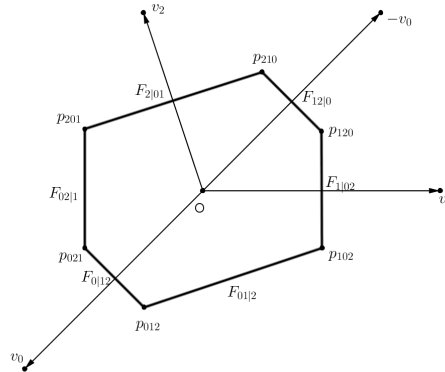


Figura 2.2: Celda de Voronoi Primitiva 2-dimensional.

En dimensión 2 hay dos formas de celdas de Voronoi, la celda primitiva que es hexagonal y la rectangular que es una “degeneración” de la primitiva que ocurre al anular uno de los parámetros de Selling. Sin pérdida de generalidad consideremos  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$  con lo cual el parámetro de Selling  $p_{12} = 0$ . El conjunto  $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  deja de ser una superbase obtusa, y pasa a ser una superbase laxa. La matriz de Gram reducida asociada al retículo ahora es

$$A = \begin{pmatrix} p_{01} & 0 \\ 0 & p_{02} \end{pmatrix}$$

Los vectores de Voronoi que determinan las caras de la celda son  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $-\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2$ ,  $-\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ . Dado que  $p_{12} = 0$  la norma  $|\pm e_{12}| = 0$  como consecuencia las dos caras generadas por los vectores  $\mathbf{v}_0$  y  $-\mathbf{v}_0$  desaparecen. La celda de voronoi cuenta con 4 caras y 4 vértices.

Los vectores de Voronoi, las caras y vertices de la celda son como sigue:

<i>Vector de Voronoi</i>	<i>Cara - Arista</i>	<i>Vértice</i>
$\mathbf{v}_1$	$F_{1 02}$	$p_{102}, p_{120}$
$\mathbf{v}_2$	$F_{2 01}$	$p_{120}, p_{201}$
$-\mathbf{v}_1$	$F_{02 1}$	$p_{201}, p_{210}$
$-\mathbf{v}_2$	$F_{0 12}$	$p_{102}, p_{120}$

las  $\mathbf{y}$ -coordenadas de los vertices en la celda son:

$$p_{102} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_{01} + p_{02} \\ p_{01} \\ -p_{02} \end{pmatrix} \quad p_{120} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_{01} - p_{02} \\ p_{01} \\ p_{02} \end{pmatrix} \quad p_{201} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} - p_{02} \\ -p_{01} \\ p_{02} \end{pmatrix}$$

$$p_{210} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} \\ -p_{01} \\ -p_{02} \end{pmatrix}$$

Las  $\mathbf{y}$ -coordenadas de las aristas

$$e_{01} = \begin{pmatrix} p_{01} \\ -p_{01} \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_{02} = \begin{pmatrix} p_{02} \\ 0 \\ -p_{02} \end{pmatrix} \quad -e_{01} = \begin{pmatrix} -p_{01} \\ p_{01} \\ 0 \end{pmatrix} \quad -e_{02} = \begin{pmatrix} -p_{02} \\ 0 \\ p_{02} \end{pmatrix}$$

la norma de las aristas estan dadas por

$$|\pm e_{01}| = p_{01} \sqrt{\frac{\Delta_{01}}{\Delta}} \quad |\pm e_{02}| = p_{02} \sqrt{\frac{\Delta_{02}}{\Delta}}$$

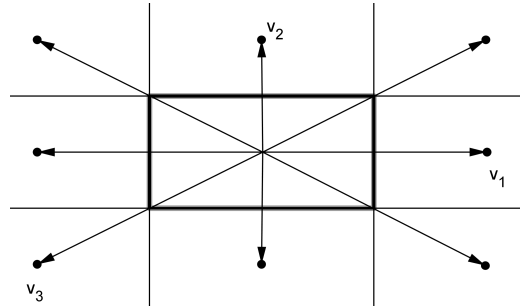


Figura 2.3: Celda de Voronoi 2-dimensional.

Si se consideran dos parámetros de Selling iguales a cero, el determinante de la matriz Gram reducida sería cero, lo cual indica que el retículo perdería dimensión, por lo tanto, las celdas de Voronoi presentadas anteriormente son los posibles casos en dimensión 2.

## 2.2. Descripción Celda de Voronoi en Dimensión 3.

Voronoi demostró que todo retículo en dimensión 3 es de Tipo I, es decir todo retículo en  $\mathbb{R}^3$  tiene una superbase obtusa  $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ . Las  $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas para cualquier elemento  $t \in \mathbb{R}^3$  estan dadas por  $(y_0, y_1, y_2, y_3) = (t \cdot \mathbf{v}_0, t \cdot \mathbf{v}_1, t \cdot \mathbf{v}_2, t \cdot \mathbf{v}_3)$ , dado que  $\sum_{i=0}^3 \mathbf{v}_i = 0$ , tenemos que  $\sum_{i=0}^3 t \cdot \mathbf{v}_i = 0$ .

Si  $S$  es un subconjunto propio de  $\{0, 1, 2, 3\}$ ,  $\mathbf{v}_S = \sum_{i \in S} \mathbf{v}_i$  es un vector de Voronoi de  $\Lambda$ , en total hay 14 de tales vectores. Cada uno de los cuales determina una cara 2-dimensional de la celda de Voronoi  $S(\mathbf{0})$ . Considerando los parámetros de Selling correspondientes a la superbase obtusa  $B$ ,  $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ , con  $0 \leq i < j \leq 3$  la matriz de Gramm asociada al retículo viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} p_{01} + p_{12} + p_{13} & -p_{12} & -p_{13} \\ -p_{12} & p_{02} + p_{12} + p_{23} & -p_{23} \\ -p_{13} & -p_{23} & p_{03} + p_{13} + p_{23} \end{pmatrix}$$

El determinante del retículo viene dado por

$$\det(\Lambda) = p_{01}p_{02}p_{03} + p_{01}p_{02}p_{13} + p_{01}p_{03}p_{12} + p_{02}p_{03}p_{12} + p_{02}p_{03}p_{13} + p_{01}p_{02}p_{23} + p_{01}p_{12}p_{13} + p_{01}p_{03}p_{23} + p_{02}p_{12}p_{13} + p_{03}p_{12}p_{13} + p_{01}p_{12}p_{23} + p_{01}p_{13}p_{23} + p_{02}p_{12}p_{23} + p_{02}p_{13}p_{23} + p_{03}p_{12}p_{23} + p_{03}p_{13}p_{23}. \quad (2.1)$$

Si  $S$  es un subconjunto propio de  $\{0, 1, 2, 3\}$  y  $\bar{S} = \{0, 1, 2, 3\} \setminus S$  denotaremos por  $F_{S|\bar{S}}$  la cara 2-dimensional determinada por el vector de voronoi  $\mathbf{v}_S = \sum_{i \in S} \mathbf{v}_i$ , en particular para  $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ .

La cara  $F_{i|jkl}$  contiene a los puntos  $t \in \mathbb{R}^3$  cuya  $i$ -ésima  $\mathbf{y}$ -coordenada es  $y_i = \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ik} + p_{il})$ ; y la cara  $F_{ij|kl}$  contiene los puntos  $t \in \mathbb{R}^3$  para los cuales  $y_i + y_j = \frac{1}{2}(p_{ik} + p_{il} + p_{jk} + p_{jl})$ . Denotaremos por  $F_{jkl|i}$  la cara opuesta a  $F_{i|jkl}$  y por  $F_{kl|ij}$  la cara opuesta a  $F_{ij|kl}$ .

Las caras adyacentes a  $F_{i|jkl}$  son  $F_{ij|kl}$ ,  $F_{ik|jl}$ ,  $F_{il|jk}$ ,  $F_{ikj|l}$ ,  $F_{ijl|k}$  y  $F_{ikl|j}$ , en general, si  $i, j, k, l$  es un reordenamiento de  $0, 1, 2, 3$  la cara 2-dimensional  $F_{i|jkl}$  y su opuesta  $F_{jkl|i}$  son hexagonales. Analogamente las caras adyacentes a  $F_{ij|kl}$  son  $F_{i|jkl}$ ,  $F_{j|ikl}$ ,  $F_{ijk|l}$ ,  $F_{ijl|k}$  y por tanto dichas caras  $F_{ij|kl}$  son rectangulares.

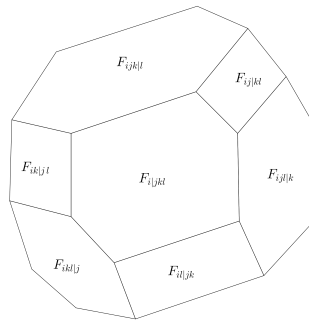


Figura 2.4: Caras Adyacentes de  $F_{i|jkl}$ .

Consideremos  $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  una superbase obtusa estricta de un retículo 3-dimensional  $\Lambda$ , un elemento de  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$  queda determinado por sus  $\mathbf{y}$ -coordenadas, es decir los productos internos de  $\mathbf{t}$  con los elementos de una superbase. Las  $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas son  $(y_0, y_1, y_2, y_3) = (t \cdot \mathbf{v}_0, t \cdot \mathbf{v}_1, t \cdot \mathbf{v}_2, t \cdot \mathbf{v}_3)$ , donde  $\sum_{i=0}^3 \mathbf{v}_i = 0$  por lo que  $\sum_{i=0}^3 y_i = 0$ .

Si  $i j k l$  es un reordenamiento de  $0 1 2 3$ , las caras  $F_{i|jkl}$ ,  $F_{ij|kl}$  y  $F_{ijk|l}$  son vecinas dos a dos, y su intersección  $F_{i|jkl} \cap F_{ij|kl} \cap F_{ijk|l}$  es un vértice de la celda, al que denotamos por  $\mathbf{p}_{ijkl}$  sus  $\mathbf{y}$ -coordenadas satisfacen las relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_i &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i) \\ \mathbf{y}_i + \mathbf{y}_j &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) \\ \mathbf{y}_i + \mathbf{y}_j + \mathbf{y}_k &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_l) \end{aligned}$$

de este modo, las  $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas de  $\mathbf{p}_{ijkl}$  son:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_i &= \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ik} + p_{il}) \\ \mathbf{y}_j &= \frac{1}{2}(-p_{ij} + p_{jk} + p_{jl}) \\ \mathbf{y}_k &= \frac{1}{2}(-p_{ik} - p_{jk} + p_{kl}) \\ \mathbf{y}_l &= \frac{1}{2}(-p_{il} - p_{jl} - p_{kl}) \end{aligned}$$

Ahora bien, el vértice  $\mathbf{p}_{ijkl}$  pertenece a las caras  $F_{i|jkl}$ ,  $F_{ij|kl}$  y  $F_{ijk|l}$ , tomando dos de estas caras, digamos  $F_{i|jkl}$  y  $F_{ij|kl}$ , la otra vecina a ellas distinta de  $F_{ijk|l}$  es  $F_{ijl|k}$ , éstas tres caras determinan al vértice  $\mathbf{p}_{ijlk}$ , que es adyacente a  $\mathbf{p}_{ijkl}$ , pues comparte con él dos de las tres caras que lo determinan. De manera similar  $F_{i|jkl}$ ,  $F_{ijk|l}$ , tienen como única cara vecina a  $F_{ikl|j}$ , y las tres determinan al vértice  $\mathbf{p}_{ikjl}$ , finalmente para  $F_{ij|kl}$  y  $F_{ijk|l}$ , la única cara vecina es  $F_{j|ikl}$  y juntas determinan al vértice  $\mathbf{p}_{jikl}$ .

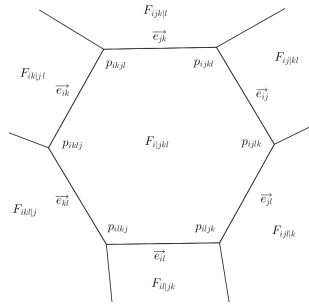


Figura 2.5: Vértices de  $F_{i|jkl}$ .

En resumen, los vértices  $\mathbf{p}_{ijlk}$ ,  $\mathbf{p}_{ikjl}$  y  $\mathbf{p}_{jikl}$ , son adyacentes a  $\mathbf{p}_{ijkl}$  y definen 3 aristas, a saber:

- $e_{ij} = \overline{\mathbf{p}_{ijkl}\mathbf{p}_{jikl}}$  que tiene  $\mathbf{y}$ -coordenadas asociadas  $\mathbf{y}_i = -p_{ij}$ ,  $\mathbf{y}_j = p_{ij}$ ,  $\mathbf{y}_k = 0$ ,  $\mathbf{y}_l = 0$ .
- $e_{jk} = \overline{\mathbf{p}_{ijkl}\mathbf{p}_{ikjl}}$  que tiene  $\mathbf{y}$ -coordenadas asociadas  $\mathbf{y}_i = 0$ ,  $\mathbf{y}_j = -p_{jk}$ ,  $\mathbf{y}_k = p_{jk}$ ,  $\mathbf{y}_l = 0$ .
- $e_{kl} = \overline{\mathbf{p}_{ijkl}\mathbf{p}_{ijlk}}$  que tiene  $\mathbf{y}$ -coordenadas asociadas  $\mathbf{y}_i = 0$ ,  $\mathbf{y}_j = 0$ ,  $\mathbf{y}_k = -p_{kl}$ ,  $\mathbf{y}_l = p_{kl}$ .



Si continuamos así, encontramos que hay 6 tipos de aristas, uno por cada elección de dos  $\mathbf{y}$ -coordenadas iguales a cero. Las restantes son:

- $e_{ik} = \overline{\mathbf{p}_{ikjl}\mathbf{p}_{kijl}}$  que tiene  $\mathbf{y}$ -coordenadas asociadas  $\mathbf{y}_i = -p_{ik}$ ,  $\mathbf{y}_j = 0$ ,  $\mathbf{y}_k = p_{ik}$ ,  $\mathbf{y}_l = 0$ .
- $e_{il} = \overline{\mathbf{p}_{iljk}\mathbf{p}_{lijk}}$  que tiene  $\mathbf{y}$ -coordenadas asociadas  $\mathbf{y}_i = -p_{il}$ ,  $\mathbf{y}_j = 0$ ,  $\mathbf{y}_k = 0$ ,  $\mathbf{y}_l = p_{il}$ .
- $e_{jl} = \overline{\mathbf{p}_{ikjl}\mathbf{p}_{iklj}}$  que tiene  $\mathbf{y}$ -coordenadas asociadas  $\mathbf{y}_i = 0$ ,  $\mathbf{y}_j = -p_{jl}$ ,  $\mathbf{y}_k = 0$ ,  $\mathbf{y}_l = p_{jl}$ .

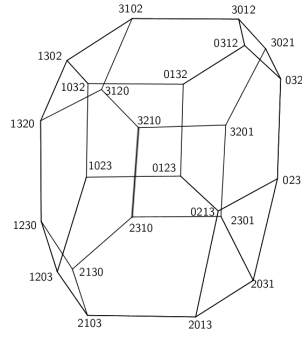


Figura 2.6: Octaedro Truncado  $\pi_3$ .

En el siguiente teorema Conway y Sloane [?] muestran la relación directa entre la longitud de las aristas y los parámetros de Selling asociados a una superbase obtusa. Si el determinante del retículo es  $\det(\Lambda) = \Delta$ , y  $\Delta_{ij}$  es la derivada de  $\Delta$  respecto a  $p_{ij}$  tenemos.

**Teorema 2.2.1** (“Edge length” en dimensión 3). *Sea  $\Lambda$  un retículo 3-dimensional con superbase obtusa  $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ , entonces la longitud de la arista  $e_{ij}$  que tiene vértices en  $\mathbf{p}_{ijkl}$  y  $\mathbf{p}_{jikl}$  viene dada por*

$$|e_{ij}| = p_{ij} \sqrt{\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}} \quad (2.2)$$

*Demostración.* Si  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$  tiene  $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas  $(y_0, y_1, y_2, y_3)$ , tenemos que

$$N(\mathbf{t}) = \frac{1}{\Delta} \left( \sum_{i=1}^3 \Delta_{0i} y_i^2 + \sum_{0 \leq i < j \leq 3} (\Delta_{0i} + \Delta_{0j} - \Delta_{ij}) y_i y_j \right) \quad (2.3)$$

y como  $e_{ij}$  tiene  $\mathbf{y}$ -coordenadas  $y_i = -p_{ij}$ ,  $y_j = p_{ij}$ ,  $y_k = 0$ ,  $y_l = 0$ , la norma de  $e_{ij}$  es

$$N(e_{ij}) = \frac{\Delta_{ij} p_{ij}^2}{\Delta},$$

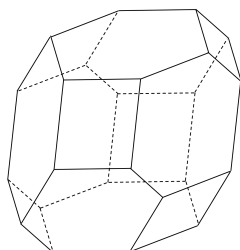
$$|e_{ij}| = p_{ij} \sqrt{\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}}.$$

□

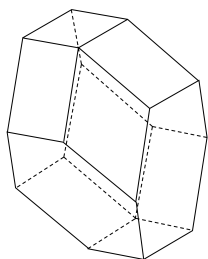
Dado que una arista de celda de Voronoi se anula si el parámetro de Selling asociado es igual a cero, las celdas que tienen los mismos parámetros iguales a cero se consideran celdas de Voronoi equivalentes, basta con una deformación continua de las celdas para obtener las otras. En dimensión 3 sólo hay cinco posibles elecciones de parámetros iguales a cero: Un cero, dos ceros, tres ceros colineales, tres ceros no colineales, o cuatro ceros. Cada una de éstas posibilidades genera una celda de Voronoi.

Esto se resume en el siguiente teorema dado por Fedorov en [Fed].

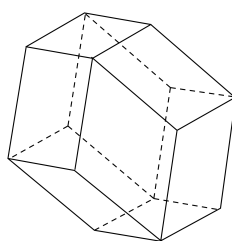
**Teorema 2.2.2** (Fedorov, 1885). *Hay sólo cinco posibilidades combinatorias diferentes para la forma de celdas de Voronoi de un retículo tres dimensional.*



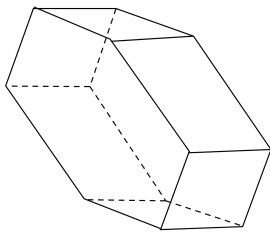
Octaedro truncado



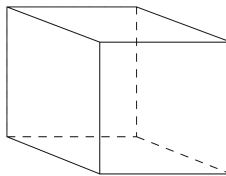
Dodecahedro hexarómbico.



Dodecahedro rómbico.



Prisma Hexagonal.



Cubo.

## Capítulo 3

# Descripción Celda Primitiva en retículos Tipo I 4-dimensionales.

En la sección anterior se mostró que hasta dimensión 3 es posible construir la celda de Voronoi a través de los parámetros de Selling asociados a una base obtusa del retículo. En dimensión 4 hay tres tipos de retículos primitivos y Delone en [De], muestra una enumeración geométrica de 51 tipos de celdas de Voronoi presentes en dimensión 4; en dicha clasificación no se tiene un procedimiento para conocer la forma de la celda a partir del retículo aunque, si se conoce los tipos de politopos que corresponden a las celdas. Por otra parte Deza en [DG] hace un trabajo computacional en el que muestra que hay 52 tipos de celdas de Voronoi en dimensión 4. Engel en [En] desarrolla un trabajo combinatorio en el que establecio cotas para la cantidad de vértices, aristas y caras de cada una de 52 celdas de Voronoi. Por otro lado Conway en [Co], hace una reclasificación de los retículos a través de las Conormas análogo al realizado en dimensión 3, que permiten diferenciar los retículos, pero no da información explícita suficiente sobre la naturaleza geométrica de la celda de Voronoi del retículo a partir de la superbase reducida. Charve desarrolla su método de reducción de formas cuadráticas cuaternarias con el cual permite: dado un retículo, hallar una superbase reducida asociada a él. En este trabajo resolveremos la pregunta ¿Dada una superbase reducida es posible determinar una descripción detallada de la celdas de Voronoi asociadas a retículos Tipo I en dimensión 4? Nos proponemos hacer la identificación de las celdas de Voronoi a través de los parámetros de Selling en retículo Tipo I llamados Zonotopales los cuales se derivan de un permutohedro. Es decir, dada una forma cuaternaria definida positiva que tiene asociada una superbase obtusa, dar una descripción detallada de cuantos vértices, aristas, caras y caras 2-dimensionales conforman la celda de Voronoi asociada a esa superbase así como, identificar quienes son en términos de las  $y$ -coordenadas.

### 3.1. Vectores de Voronoi y Facets.

Sea  $\Lambda$  un retículo primitivo 4-dimensional de Tipo I, y sea  $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$  una superbase obtusa para  $\Lambda$ , si  $0 \leq i \neq j \leq 4$ , denotamos por  $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ , a los parámetros de Selling asociados a  $B$ . Nos proponemos describir  $S(\mathbf{0})$ , la celda de Voronoi de  $\Lambda$  centrada en el origen, en términos de los parámetros de Selling.

Si  $S$  es uno de los subconjuntos propios de  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ , los vectores de Voronoi de  $\Lambda$  están

dados por  $\mathbf{v}_S = \sum_{i \in S} \mathbf{v}_i$ , en este sentido los vectores de Voronoi que determina  $S(\mathbf{0})$  son:

$\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4$
$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4$
$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$

Cada vector  $\mathbf{v}_S$  determina una 3-cara o facet  $F_S$  de  $S(\mathbf{0})$ . Si  $\bar{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\} \setminus S$ , entonces  $\mathbf{v}_{\bar{S}} = -\mathbf{v}_S$ , lo que implica que las facets  $F_{\bar{S}}$  y  $F_S$  son congruentes, pero opuestas respecto al origen, por lo que escribimos  $F_{\bar{S}} = -F_S$ .

La siguiente lista muestra las 30 facets correspondientes a los vectores de Voronoi de  $\Lambda$ .

$F_0$	$F_{01}$	$F_{13}$	$-F_0$	$-F_{01}$	$-F_{13}$
$F_1$	$F_{02}$	$F_{14}$	$-F_1$	$-F_{02}$	$-F_{14}$
$F_2$	$F_{03}$	$F_{23}$	$-F_2$	$-F_{03}$	$-F_{23}$
$F_3$	$F_{04}$	$F_{24}$	$-F_3$	$-F_{04}$	$-F_{24}$
$F_4$	$F_{12}$	$F_{34}$	$-F_4$	$-F_{12}$	$-F_{34}$

**Definición 3.1.1.** Sea  $\Lambda$  un retículo 4-dimensional, decimos que dos facets  $F$  y  $F'$  de la celda de Voronoi  $S(\mathbf{0})$  son *vecinas*, si su intersección es una 2-cara. A los vectores de Voronoi que las dirigen los llamaremos *vectores vecinos*.

**Lema 3.1.2.** Sea  $\Lambda$  un retículo 4-dimensional de Tipo I, y  $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$  una superbase obtusa para  $\Lambda$ , sean  $F_S$  y  $F_T$  dos facets de la celda de Voronoi  $S(\mathbf{0})$  de un retículo  $\Lambda$ , entonces

$$F_S, F_T \text{ son vecinas si y sólo si } S \subset T \text{ o } T \subset S. \quad (3.1)$$

*Demostración.* Si una facet tiene asociado un vector de Voronoi, y éste a su vez un subconjunto propio de  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ; a partir de la definición 3.1.1 se llega la conclusión.  $\square$

Ahora bien, si  $S$  es un subconjunto propio de  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ , denotamos por  $\mathcal{F}(S)$  al conjunto de las caras vecinas de  $F_S$  tenemos:

- Si  $S = \{i\}$ , el conjunto de caras vecinas de  $F_i$  es:

$$\mathcal{F}(\{i\}) = \{F_S : i \in S\}. \quad (3.2)$$

Por ejemplo, el conjunto de cara vecinas de la facet dirigida por el vector  $\mathbf{v}_0$ , es:

$$\mathcal{F}(\{0\}) = \{F_{01}, F_{02}, F_{03}, F_{04}, F_{012}, F_{013}, F_{014}, F_{024}, F_{034}, F_{023}, F_{0234}, F_{0134}, F_{0124}, F_{0123}\}$$

- Si  $S = \{i, j\}$ , entonces

$$\mathcal{F}(\{i, j\}) = \{F_i, F_j, F_{ijk}, F_{ijl}, F_{ijm}, F_{ijkl}, F_{ijkm}, F_{ijlm}\}. \quad (3.3)$$

- Si  $S = \{i, j, k\}$ ,

$$\mathcal{F}(\{i, j, k\}) = \{F_i, F_j, F_k, F_{ij}, F_{ik}, F_{jk}, F_{ijkl}, F_{ijkm}\}. \quad (3.4)$$

- Dado que  $\mathcal{F}(\{j, k, l, m\}) = -\mathcal{F}(\{i\})$ , se puede concluir que  $\mathcal{F}(\{j, k, l, m\})$  tiene como facets vecinas a las opuesta de las facets vecinas de  $F_i$ .

La siguiente tabla muestra el número de 2-caras en cada facet.

<i>Facet</i>	<i>Cantidad de 2-caras</i>
$F_i$ para $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$	14
$F_{ij}$ para $\{i, j\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$	8
$F_{ijk}$ para $\{i, j, k\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$	8

### 3.2. Vertices de Facets.

En la celda de Voronoi primitiva  $S(\mathbf{0})$  cada vértice es la intersección de cuatro facets. De tal forma que si  $\mathbf{p}$  es un vértice de  $S(\mathbf{0})$  y si  $F_{S_1}, F_{S_2}, F_{S_3}$  y  $F_{S_4}$  son las facets que lo determinan, entonces ellas son vecinas dos a dos, y por el Lema 3.1.2, podemos re-etiquetar los conjuntos  $S_1, S_2, S_3, S_4$  de tal manera que

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset S_4$$

. Adicionalmente, dado que ninguno los conjuntos puede ser vacío, y tampoco pueden haber dos de ellos iguales, ocurre que

$$S_1 = \{i\}, S_2 = \{i, j\}, S_3 = \{i, j, k\} \text{ y } S_4 = \{i, j, k, l\}$$

con  $\{i, j, k, l\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$  con lo cual  $\mathbf{p} \in F_i \cap F_{ij} \cap F_{ijk} \cap F_{ijkl}$ .

Si  $ijklm$  es un reordenamiento de  $01234$ , denotaremos por  $\mathbf{p}_{ijklm}$  al vértice formado por la intersección  $F_i \cap F_{ij} \cap F_{ijk} \cap F_{ijkl}$ , por lo cual existen tantos vértices de la celda de Voronoi de un retículo Tipo I como la cantidad de permutaciones de los elementos de  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  así, la celda tiene  $5! = 120$  vértices distribuidos de la siguiente manera:

La facet  $F_i$  tiene 14 caras vecinas dos dimensionales. La intersección de 4 facets de  $\mathcal{F}(\{i\})$  que sean vecinas dos a dos determinan un único vértice. La facet  $F_i$  se intercepta con cada una de las cuatro facets  $F_{is}$  para  $s \in \{j, k, l, m\}$ , una vez interceptadas, estas se interceptan con cada una de las tres facets  $F_{isr}$  para  $r \in I = \{j, k, l, m\} \setminus \{s\}$  y esta última se intercepta con cada una de las dos facets  $F_{isrw}$  y  $F_{isru}$  donde  $w, u \in I \setminus \{r\}$ , dado que esto ocurre para cualquier reordenamiento  $ijklm$  de  $01234$  las facets del tipo  $F_i$  tienen un total de  $4 \times 3 \times 2 = 24$  vértices.

Analizando de manera similar las facets del tipo  $F_{ij}$ , tienen 8 caras vecinas 2-dimensionales y el total de vértices para este tipo de facets es:  $2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ .

Notemos que las facets del tipo  $F_{ij}$  comparten sus caras 2-dimensionales con  $F_i$  que es combinatoriamente equivalente al permutaedro  $\pi_3$ , de modo que sus caras 2-dimensionales son hexágonos o cuadriláteros. Adicionalmente, si  $k$  es el número de cuadriláteros en  $F_{ij}$ , entonces la cantidad de vértices es  $4k/2 = 2k$ . Dado que las facets del tipo  $F_{ij}$  tienen 12 vértices, el número de cuadriláteros en ellas es  $k = 6$  y las dos caras restantes son hexagonales, de manera que las facets del tipo  $F_{ij}$  son prismas hexagonales.

### 3.3. y-coordenadas de los vértices de $S(\mathbf{0})$ .

Si  $F$  es la facet dirigida por el vector de Voronoi  $\mathbf{v}$ , los puntos  $\mathbf{t} \in F$  son de la forma  $\mathbf{t} = \frac{1}{2}\mathbf{v} + h$ , donde  $h \perp \mathbf{v}$ , así que

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}). \quad (3.5)$$

si  $i j k l m$  es un reordenamiento de los índices  $0 1 2 3 4$ , entonces:

- Si  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i$ , los puntos  $\mathbf{t} \in F_i$  son de la forma  $\mathbf{t} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_i + h$ , con  $h \perp \mathbf{v}_i$ , y por lo tanto  $y_i = \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i)$ , es decir, para  $\mathbf{t}$  en  $S(\mathbf{0})$ ,  $\mathbf{t} \in F_i$  si y sólo si  $y_i = \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ik} + p_{il} + p_{im})$
- Si  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j$ , los puntos  $\mathbf{t} \in F_{ij}$ , son de la forma  $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j}{2} + h$ , con  $h \perp (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j)$  y así

$$y_i + y_j = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j)$$

por lo tanto

$$\mathbf{t} \in F_{ij} \text{ si y sólo si } y_i + y_j = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j).$$

- Si  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k$ , la facet  $F_{ijk}$  tiene puntos  $\mathbf{t}$  de  $S(\mathbf{0})$  para los cuales  $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k}{2} + h$  con  $h \perp (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k)$ , así que

$$\mathbf{t} \in F_{ijk} \text{ si y sólo si } y_i + y_j + y_k = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k).$$

- Finalmente, a la facet  $F_{ijkl}$  pertenecen los puntos  $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}_m}{2} + h$ , con  $h \perp \mathbf{v}_m$ , por lo cual

$$y_i + y_j + y_k + y_l = -y_m = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_m),$$

así,

$$\mathbf{t} \in F_{ijkl} \text{ si y sólo si } y_m = -\frac{1}{2}N(\mathbf{v}_m).$$

Ésta relación nos permite calcular las  $\mathbf{y}$ -coordenadas de cualquier vértice de la celda de Voronoi. En particular el vértice  $\mathbf{p}_{ijklm}$  tiene las siguientes coordenadas

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{1}{2} N(\mathbf{v}_i) \\ y_j &= \frac{1}{2} [N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) - N(\mathbf{v}_i)] \\ y_k &= \frac{1}{2} [N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k) - N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j)] \\ y_l &= \frac{1}{2} [N(\mathbf{v}_m) - N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k)] \\ y_m &= -\frac{1}{2} N(\mathbf{v}_m). \end{aligned}$$

Si  $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$  para  $0 \leq i < j \leq 4$ , las  $\mathbf{y}$ -coordenadas de  $\mathbf{p}_{ijklm}$  son

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{ij} + p_{ik} + p_{il} + p_{im} \\ -p_{ij} + p_{jk} + p_{jl} + p_{jm} \\ -p_{ik} - p_{jk} + p_{kl} + p_{km} \\ -p_{il} - p_{jl} - p_{kl} + p_{lm} \\ -p_{im} - p_{jm} - p_{km} - p_{lm} \end{pmatrix}$$

### 3.4. Aristas de $S(\mathbf{0})$ .

Dos vértices en la celda  $S(\mathbf{0})$  son adyacentes si ellos comparten tres de las cuatro facets que los determinan. Consideremos el vértice  $\mathbf{p}_{ijklm}$ , el cual pertenece a las caras  $F_i, F_{ij}, F_{ijk}$  y  $F_{ijkl}$ , si tomamos tres de estas caras,  $F_i, F_{ij}$  y  $F_{ijk}$ , la única facet de  $S(\mathbf{0})$  distinta de  $F_{ijkl}$ , que es vecina a ellas tres es  $F_{ijkm}$ , así que la intersección  $F_i \cap F_{ij} \cap F_{ijk} \cap F_{ijkm}$  determina un nuevo vértice,  $\mathbf{p}_{ijkml}$ , el cual es adyacente a  $\mathbf{p}_{ijklm}$ .

Es posible hacer lo anterior de cuatro formas distintas, una por cada elección de tres de las facets que determinan a  $\mathbf{p}_{ijklm}$ , en consecuencia, cada vértice  $S(\mathbf{0})$  tiene exactamente 4 vértices adyacentes.

Por ejemplo los cuatro vértices adyacentes al vértice  $\mathbf{p}_{ijklm}$  son:  $\mathbf{p}_{jiklm}, \mathbf{p}_{ikjlm}, \mathbf{p}_{ijlkm}$  y  $\mathbf{p}_{ijkml}$ . cada uno de los cuales determina, junto con  $\mathbf{p}_{ijklm}$ , una arista de  $S(\mathbf{0})$ .

Si denotamos por  $e_{ij}$  a la arista que tiene por vértices a  $\mathbf{p}_{ijklm}$  y  $\mathbf{p}_{jiklm}$ , encontramos que sus  $\mathbf{y}$ -coordenadas son:

$$y_i = -p_{ij}, \quad y_j = p_{ij}, \quad y_k = 0, \quad y_l = 0, \quad y_m = 0.$$

De este modo, la celda de Voronoi tiene 10 familias de aristas, una por cada elección de dos índices.

En la tabla mostramos las  $\mathbf{y}$ -coordenadas de una arista típica para cada familia.

Arista	Vértices	$\mathbf{y}$ -coordenadas $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$
$e_{01}$	$\mathbf{p}_{01234}, \mathbf{p}_{10234}$	$(-p_{01}, p_{01}, 0, 0, 0)$
$e_{02}$	$\mathbf{p}_{02134}, \mathbf{p}_{20134}$	$(-p_{02}, 0, p_{02}, 0, 0)$
$e_{03}$	$\mathbf{p}_{03124}, \mathbf{p}_{30124}$	$(-p_{03}, 0, 0, p_{03}, 0)$
$e_{04}$	$\mathbf{p}_{04123}, \mathbf{p}_{40123}$	$(-p_{04}, 0, 0, 0, p_{04})$
$e_{12}$	$\mathbf{p}_{12034}, \mathbf{p}_{21034}$	$(0, -p_{12}, p_{12}, 0, 0)$
$e_{13}$	$\mathbf{p}_{13024}, \mathbf{p}_{31024}$	$(0, -p_{13}, 0, p_{13}, 0)$
$e_{14}$	$\mathbf{p}_{14023}, \mathbf{p}_{41023}$	$(0, -p_{14}, 0, 0, p_{14})$
$e_{23}$	$\mathbf{p}_{23014}, \mathbf{p}_{32014}$	$(0, 0, -p_{23}, p_{23}, 0)$
$e_{24}$	$\mathbf{p}_{24013}, \mathbf{p}_{42013}$	$(0, 0, -p_{24}, 0, p_{24})$
$e_{34}$	$\mathbf{p}_{34012}, \mathbf{p}_{43012}$	$(0, 0, 0, -p_{34}, p_{34})$

Dado que en cada vértice inciden 4 aristas, y que cada arista une dos vértices, el número total de aristas en la celda es  $\frac{120 \times 4}{2} = 240$ . Donde cada una de las aristas es equivalente combinatoriamente a 23 aristas más; las 24 aristas forman una banda alrededor de la celda.

En resumen,  $S(\mathbf{0})$  tiene 120 vértices, 10 facets del tipo  $F_i$  y las opuestas a ellas las cuales son octaedros truncados o permutohedros, y 20 del tipo  $F_{ij}$  y sus opuestas que son prismas hexagonales, lo que hace a  $S(\mathbf{0})$  combinatoriamente equivalente al permutohedro 4-dimensional  $\pi_4$ .

Si denotamos por  $\Delta = \det(\Lambda)$ , el determinante de  $\Lambda$  expresado en términos de los parámetros de Selling del retículo y por  $\Delta_{ij}$  denotamos a la derivada formal de  $\Delta$  respecto a  $p_{ij}$ , es posible expresar la longitud de una arista de  $S(\mathbf{0})$  en términos de estas cantidades.

**Lema 3.4.1** (Longitud de las aristas en Tipo I). *Si  $\Lambda$  es un retículo de Tipo I con parámetros de Selling  $p_{ij}$  para  $0 \leq i < j \leq 4$ , entonces la longitud de la arista  $e_{ij}$  con vértices en  $\mathbf{p}_{ijklm}$  y  $\mathbf{p}_{jiklm}$*

es

$$|e_{ij}| = p_{ij} \sqrt{\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}} \quad (3.6)$$

*Demostración.* Si  $\mathbf{t}$  tiene  $\mathbf{y}$ -coordernadas  $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$ , se pueden reordenar los sumandos de tal manera que su norma tenga la forma

$$N(\mathbf{t}) = \frac{1}{\Delta} \left( \sum_{i=1}^4 \Delta_{0i} y_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (\Delta_{0i} + \Delta_{0j} - \Delta_{ij}) y_i y_j \right). \quad (3.7)$$

Dado que las  $\mathbf{y}$ -coordernadas de  $e_{ij}$  son  $y_i = -p_{ij}$ ,  $y_j = p_{ij}$ ,  $y_k = y_l = y_m = 0$ , al reemplazar en (3.7), obtenemos:

$$N(e_{ij}) = \frac{p_{ij}^2 \Delta_{ij}}{\Delta}, \quad (3.8)$$

lo que concluye la prueba. □



## Capítulo 4

# Descripción de retículos Zonotopales en dimensión 4.

La estructura topológica-combinatoria de la celda de Voronoi asociada a cada retículo está estrechamente relacionada con los parámetros de Selling reducidos del retículo, en particular el Lema 3.4.1, establece una relación directa entre la longitud de las aristas y los parámetros de Selling, de tal manera que cuando un parámetro reducido es cero las aristas de la celda relacionadas con él desaparecen.

Una forma rápida de representar un retículo es asociarle un grafo etiquetado en el que los vértices serán los elementos de una superbase reducida para el retículo, y pondremos una arista etiquetada entre los vértices  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ , si  $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \neq 0$ . Para los retículos de Tipo I, se puede probar fácilmente que grafos isomorfos se corresponde con retículos equivalentes, además si no se tiene en cuenta el valor de las etiquetas de las aristas, grafos equivalentes corresponden a retículos con celdas de Voronoi topológico-combinatoriamente equivalentes, es decir, las celdas tienen la misma forma salvo la longitud de las aristas. Geométricamente, podemos interpretar un parámetro de Selling con valor cero, como la ortogonalización de dos vectores de una superbase del retículo, lo cual en virtud del Lema 3.4.1, equivale a que desaparezca una zona de aristas y posiblemente algunas caras de la celda de Voronoi asociada.

Este hecho, nos permite establecer un procedimiento para encontrar la estructura de la celda de Voronoi para retículos de Tipo I o Zonotopales, y es el que usaremos en el presente capítulo. Una forma de entender la generación de las distintas celdas es, partiendo de un retículo primitivo de Tipo I ir ortogonalizando los vectores de la superbase, esto es, ir reduciendo continuamente una zona de aristas hasta que colapsen, momento en el cual la celda cambia de forma. Esta deformación continua puede hacerse repetidamente siempre que el retículo resultante no pierda dimensión, es decir su determinante asociado sea distinto de cero. Este ha sido el camino seguido por Conway, Engel y otros.

Nosotros haremos esencialmente lo mismo, pero adicionalmente presentamos un algoritmo para encontrar las  $\mathbf{y}$ -coordenadas de los vértices de la celda de Voronoi centrada en el origen en términos de los parámetros de Selling reducidos del retículo.

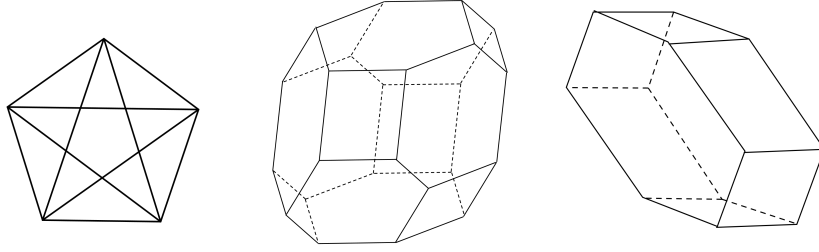
### 4.1. Retículos Zonotopales en Dimensión 4.

La siguiente descripción se determinó a partir de algoritmos que permiten encontrar la cantidad de vértices, aristas, caras 2-d y caras 3-d que conforman la celda de Voronoi del retículo, así como las  $\mathbf{y}$ -coordenadas de cada uno de sus vértices. Ver en el apéndice los algoritmos.

■ **Caso 1** (No hay parámetros iguales a cero.)

Si  $\Lambda$  es un retículo primitivo 4-dimensional, y  $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$  es una superbases obtusa asociada a él, entonces todos sus parámetros de Selling son diferentes de cero. Así las cosas el grafo asociado a este tipo de retículos es el  $K_5$ . Su celda de Voronoi es  $\pi_4$ , el permutohedro 4-dimensional.

Como vimos en el capítulo 3,  $\pi_4$  tiene 120 vértices, 240 aristas, 150 caras dos dimensionales, entre rectángulos y hexágonos, y 30 caras 3-dimensionales, 20 de ellas son prismas hexagonales y las otras 10 octahedros truncados.



Grafo Asociado  $K_5$ .    Octahedro truncado.    Prisma hexagonal.

Las  $\mathbf{y}$ -coordenadas de los vértices se pueden calcular con los algoritmo que hemos implementados, Ver apéndice. Un vértice típico en éstas celdas tiene la forma

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{04} \\ -p_{01} + p_{12} + p_{13} + p_{14} \\ -p_{02} - p_{12} + p_{23} + p_{24} \\ -p_{03} - p_{13} - p_{23} + p_{34} \\ -p_{04} - p_{14} - p_{24} - p_{34} \end{pmatrix}$$

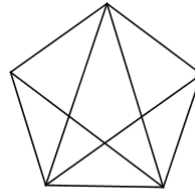
Un retículo de ésta clase es el conocido  $A_4$  cuyos parámetros de Selling son  $[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ , la matriz de Gram es asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

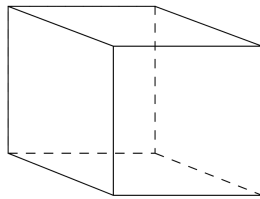
■ **Caso 2**(Un sólo parámetro igual a cero.  $p_{ij} = 0$ )

Dado que en un retículo primitivo Tipo I los vectores de una base son indistinguibles, así también lo son los vértices del grafo asociado ( $K_5$ ), así que es indiferente cual de los parámetros de Selling se haga cero. Sin pérdida de generalidad consideramos  $p_{01} = 0$ , lo que implica que los vectores  $\mathbf{v}_0$  y  $\mathbf{v}_1$  son ortogonales, esto hace que en la celda de Voronoi colapsen 24 aristas y la celda de Voronoi cambia su estructura.

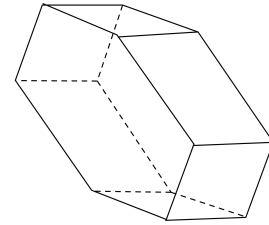
En este caso al retículo se le puede asignar el grafo  $K_5 - 1$ , la celda de Voronoi resultante tiene por tanto: 96 vértices, 30 caras dos dimensionales, entre rectángulos y hexágonos, y sus caras 3-dimensionales: 8 Cubos, 12 Prismas-hexagonales, 6 Dodecahedros-hexarómbicos y 4 Octahedros truncados.



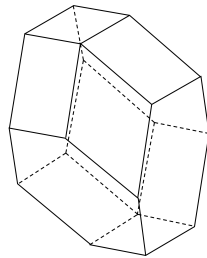
Grafo Asociado  $K_5 - 1$



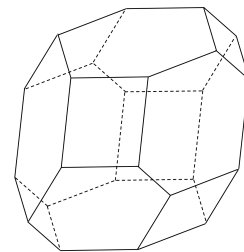
Cubo



Prisma hexagonal



Dodecahedro hexarombico



Octahedro truncado

Las  $\mathbf{y}$ -coordenadas de los vértices, para estos retículos son como en los primitivos pero con el parámetro  $p_{01} = 0$

El retículo cuyos parámetros son  $[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$  es de este tipo.

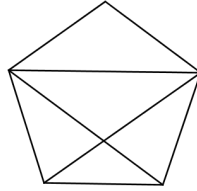
La matriz de gram asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

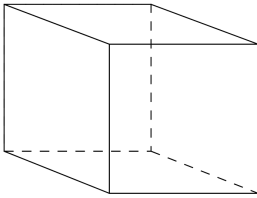
■ **Caso 3** (Dos parámetro iguales a cero pero comparten un 'índice.  $p_{ij} = 0$ ,  $p_{il} = 0$ )

En el grafo conexo  $K_{5-2}$  es posible eliminar una arista de dos maneras diferentes, en este caso consideramos eliminar una arista de tal manera que comparta un vértice con la arista eliminada en el caso anterior. Por ejemplo si  $p_{01} = 0$  y  $p_{02} = 0$ , esto significa que los vectores  $\mathbf{v}_0$  y  $\mathbf{v}_1$  son ortogonales al igual que  $\mathbf{v}_0$  y  $\mathbf{v}_2$ .

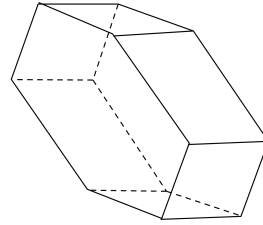
En este caso al retículo se le puede asignar el grafo  $K_5 - 2$  tal como se muestra en la figura. La celda de Voronoi que se genera tiene 72 vértices, 150 aristas 102 caras dos dimensionales, entre rectángulos y hexágonos, y 24 caras 3-dimensionales: 8 Cubos, 10 Prismas hexagonales, 4 Dodecahedros hexarómicos y 2 Octahedros truncados.



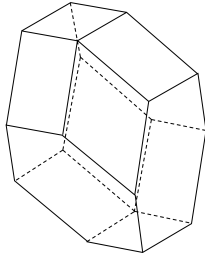
Grafo Asociado  $K_5 - 2$



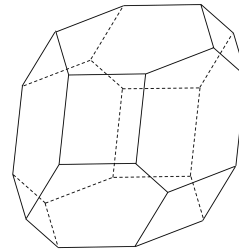
Cubo



Prisma hexagonal



Dodecahedro hexarombico



Octahedro truncado

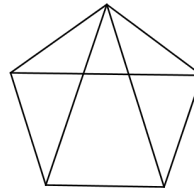
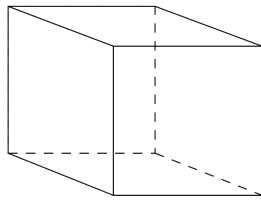
El retículo  $\Lambda = [0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$  es de éste tipo.

La matriz de Gram asociada es

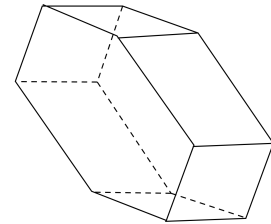
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Caso 4** (Dos parámetros iguales a cero pero que no comparten índices.  $p_{ij} = 0, p_{kl} = 0$  )  
Este caso al grafo  $K_5$  le eliminamos dos arista que no comparten vértices. Sin pérdida de generalidad consideramos  $p_{01} = 0$  y  $p_{23} = 0$  lo que implica que los vectores  $\mathbf{v}_0$  y  $\mathbf{v}_1$  son ortogonales al igual que  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$ .

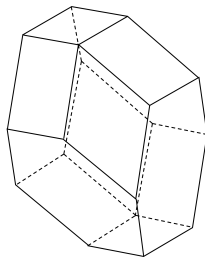
En este caso al retículo se le puede asignar el grafo  $K_5 - 1 - 1$  tal como se muestra en la figura. La celda de Voronoi correspondiente tiene 78 vértices, 168 aristas, 116 caras dos dimensionales, entre rectángulos y hexágonos, y 26 caras 3-dimensionales distribuidas así: 8 Cubos, 8 Prismas hexágonoales, 2 Dodecahedros rómbicos y 8 Dodecahedros hexarómbicos.

Grafo Asociado  $K_5 - 1 - 1$ 

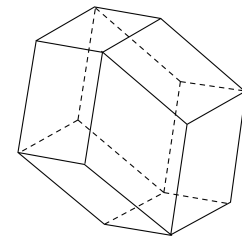
Cubo



Prisma hexagonal



Dodecahedro hexarómbico



Dodecahedro rómbico

Un retículo de esta clase es  $\Lambda = [0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1]$ .

Su matriz de gram asociada es:

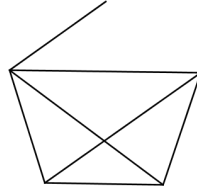
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Caso 5** (Tres parámetros iguales a cero y que comparten un índice.  $p_{ij} = 0$ ,  $p_{ik} = 0$ ,  $p_{il} = 0$  )

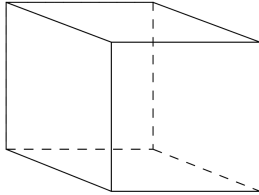
En este caso consideramos tres parámetros iguales a cero de tal manera que las tres aristas que colapsen compartan un vértice. Sin pérdida de generalidad hacemos  $p_{01} = 0$ ,  $p_{02} = 0$  y  $p_{03} = 0$  lo que implica que el vector  $\mathbf{v}_0$  es ortogonal con  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  al mismo tiempo.

Al retículo se le puede asignar el grafo  $K_4 + 1$  tal como se muestra en la figura.

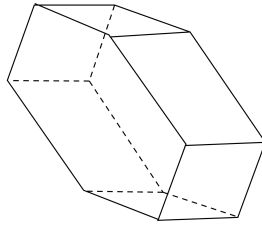
La celda de Voronoi que surge tiene 48 vértices, 96 aristas, 64 caras dos dimensionales, entre rectángulos y hexágonos, y 16 caras 3-dimensionales: 6 Cubos, 8 Prismas hexagonales, 2 octahedros truncados.



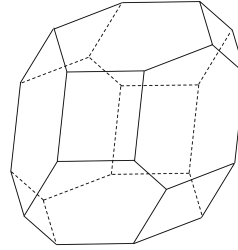
Grafo Asociado  $K_4 + 1$



Cubo



Prisma hexagonal



Octaedro truncado

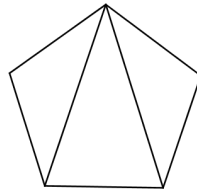
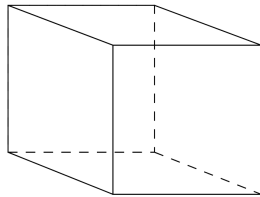
El retículo  $\Lambda = [0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$  es de éste tipo. La matriz de gram asociada a  $\Lambda$  es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

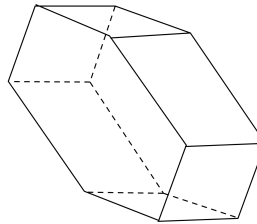
- **Caso 6** (Tres parámetros cero, con índice como en  $p_{ij} = 0$ ,  $p_{jk} = 0$ ,  $p_{il} = 0$ ).

En este caso consideramos tres parámetros iguales a cero de tal manera que una de las tres aristas que colapsan comparte vértice con las dos restantes y las otras dos sólo tienen vértice común con una de ellas. Sin pérdida de generalidad hacemos  $p_{14} = 0$ ,  $p_{24} = 0$  y  $p_{13} = 0$  lo que implica que los vectores  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_4$  son ortogonales al igual que  $\mathbf{v}_2$  con  $\mathbf{v}_4$  y  $\mathbf{v}_1$  con  $\mathbf{v}_3$ . Al retículo se le suele asignar el grafo conexo  $K_5 - 3$  tal como se muestra en la figura.

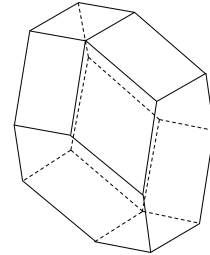
La celda de Voronoi tiene 54 vértices, 114 aristas, 80 caras dos dimensionales, entre rectángulos y hexágonos, y 20 caras 3-dimensionales: 8 Cubos, 8 Prismas hexagonales, 4 Dodecahedros hexarómbicos.

Grafo Asociado  $K_5 - 3$ 

Cubo



Prisma hexagonal



Dodecahedro hexarombico

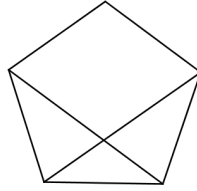
Un retículo de este estilo es  $\Lambda = [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1]$ . Cuya matriz de Gram asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

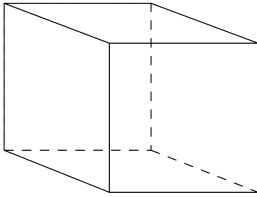
- **Caso 7** (Tres parámetros iguales a cero, con índices como en  $p_{ik} = 0$ ,  $p_{il} = 0$ ,  $p_{jm} = 0$ ).

Consideramos tres parámetros iguales a cero, de tal manera que las aristas que colapsan sólo dos de ellas compartan un vértice. Sin pérdida de generalidad hacemos  $p_{02} = 0$ ,  $p_{03} = 0$  y  $p_{14} = 0$  lo que implica que el vector  $\mathbf{v}_0$  es ortogonal a  $\mathbf{v}_2$  y a  $\mathbf{v}_3$ , y  $\mathbf{v}_1$  es ortogonal con  $\mathbf{v}_4$ . Asociamos el grafo  $K_5 - 2 - 1$  a dichos retículos tal como se muestra en la figura.

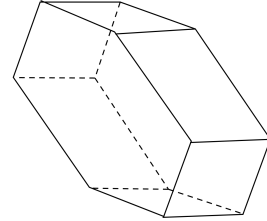
La celda de Voronoi para este tipo de retículos tiene 60 vértices, 134 aristas, 98 caras dos dimensionales, entre rectángulos y hexágonos, y 24 caras 3-dimensionales: 8 Cubos, 10 Prismas hexagonales, 2 Dodecahedros hexarómbicos, 4 Dodecahedros rómbicos.



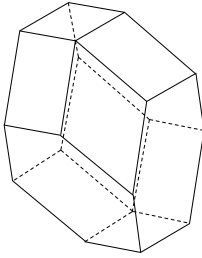
Grafo Asociado  $K_5 - 2 - 1$



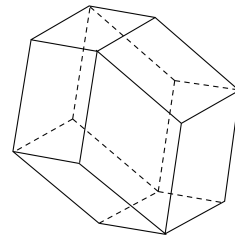
Cubo



Prisma hexagonal



Dodecahedro hexarómbico



Dodecahedro rómbico

El retículo  $\Lambda = [1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1]$  es de éste tipo. La matriz Gram asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

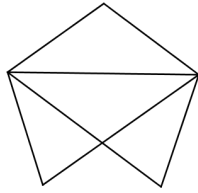
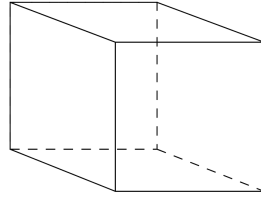


- **Caso 8** (Tres parámetros iguales a cero, comparten índice dos a dos  $p_{ij} = 0, p_{ik} = 0, p_{jk} = 0$  )

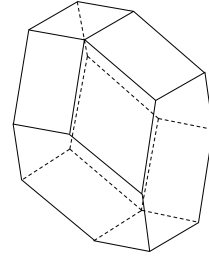
Consideramos tres parámetros iguales a cero de tal manera que las tres aristas que colapsen compartan un vértice dos a dos. Sin pérdida de generalidad hacemos  $p_{01} = 0, p_{02} = 0$  y  $p_{12} = 0$  lo que implica que el vector  $\mathbf{v}_0$  es ortogonal a  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_0$  y a  $\mathbf{v}_1$ .

En este caso al retículo se le puede asignar el grafo conexo  $C_{2221}$  tal como se muestra en la figura.

La celda de Voronoi tiene 54 vértices, 116 aristas, 84 caras dos dimensionales, entre rectángulos y hexágonos, y 22 caras 3-dimensionales: 16 Cubos, 6 Dodecahedros hexarómbicos.

Grafo Asociado  $C_{2221}$ 

Cubo



Dodecahedro hexarómbico

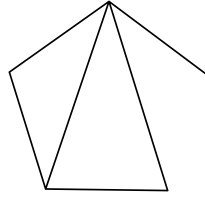
El retículo  $\Lambda = [0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1]$  es de éste tipo. La matriz de gram asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

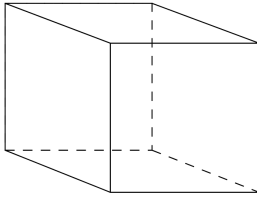
- **Caso 9** (Cuatro parámetros iguales a cero del tipo  $p_{ij} = 0$ ,  $p_{ik} = 0$ ,  $p_{il} = 0$ ,  $p_{jl} = 0$ )

En este caso hacemos colapsar continuamente cuatro parámetros de Selling de tal manera que tres tienen un índice en común y el parámetro restante tiene índice común con dos parámetros de los tres mencionados. Tal como en el caso  $p_{01} = 0$ ,  $p_{02} = 0$ ,  $p_{03} = 0$  y  $p_{13} = 0$  lo que implica que  $\mathbf{v}_0$  es ortogonal con  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$  y  $\mathbf{v}_1$  lo es con  $\mathbf{v}_3$ . Al retículo se le puede asignar el grafo conexo  $C_{2221} + 1$  ver figura.

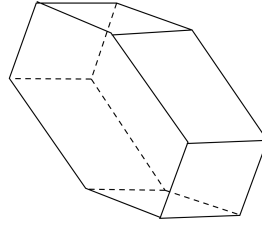
La celda de Voronoi tiene 36 vértices, 74 aristas, 52 caras dos dimensionales, entre rectángulos y hexágonos, y 14 caras 3-dimensionales: 8 Cubos, 4 Prismas hexagonales, 2 Dodecahedros hexarómbicos.



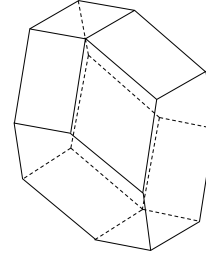
Grafo Asociado  $C_{2221} + 1$



Cubo



Prisma hexagonal



Dodecahedro hexarómbico

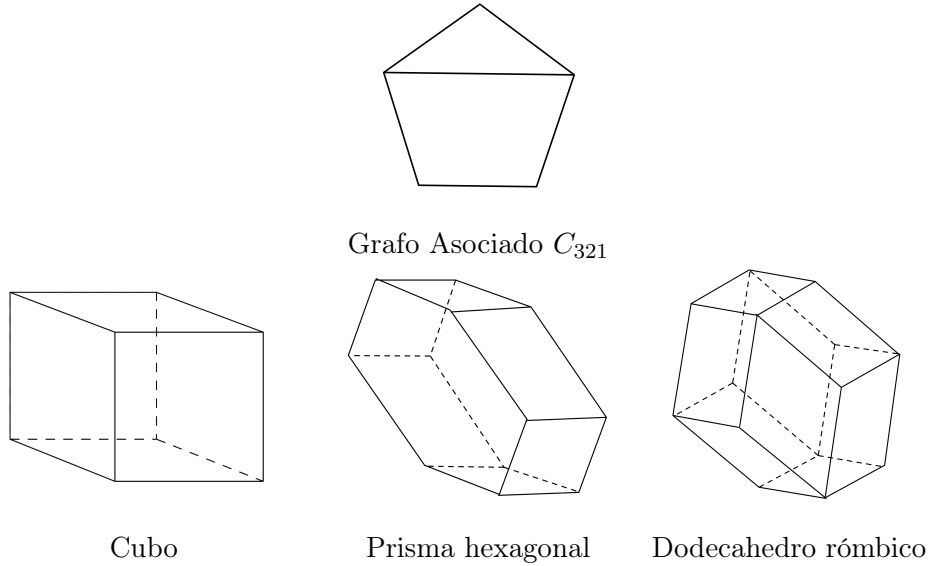
Un retículo de esta clase es  $\Lambda = [0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1]$ . Una matriz de gram asociada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

■ **Caso 10** (Cuatro parámetros  $p_{ij} = 0$ ,  $p_{ik} = 0$ ,  $p_{km} = 0$ ,  $p_{jl} = 0$ )

En este caso consideramos cuatro parámetros iguales a cero de tal manera que dos de las aristas que colpsen comparten un vértice con dos aristas que no tienen vértice en común. Justo como en el caso  $p_{02} = 0$ ,  $p_{03} = 0$ ,  $p_{13} = 0$  y  $p_{24} = 0$  lo que implica que los vectores  $\mathbf{v}_0$  y  $\mathbf{v}_2$  son ortogonales al igual que  $\mathbf{v}_0$  con  $\mathbf{v}_3$ ,  $\mathbf{v}_1$  con  $\mathbf{v}_3$ , y  $\mathbf{v}_2$  con  $\mathbf{v}_4$ . Al retículo se le asigna el grafo  $C_{321}$  ver figura.

La celda de Voronoi para estos retículos está formada por 42 vértices, 94 aristas, 72 caras dos dimensionales, entre rectángulos y hexágonos, y 20 caras 3-dimensionales 12 de ellas son Cubos, 6 Prismas hexagonales, 2 Dodecahedros rómbicos.



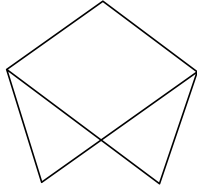
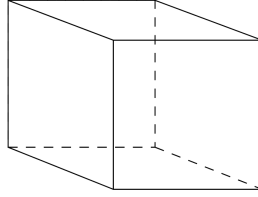
Un ejemplo de esta clase de retículos es  $\Lambda = [1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1]$ . Cuya matriz de Gram viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

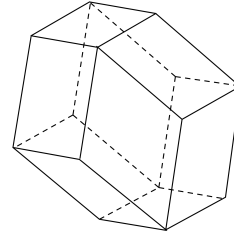
- **Caso 11** (Cuatro parámetros iguales a cero, tres de ellos comparten un índice dos a dos  $p_{ij} = 0, p_{ik} = 0, p_{jk} = 0, p_{lm} = 0$ )

En este caso consideramos cuatro parámetros iguales a cero de tal manera que tres de las cuatro aristas que colapsen comparten un vértice dos a dos, y la cuarta arista no tiene vértices en común con las demás, Tal es el caso de  $p_{02} = 0, p_{03} = 0, p_{23} = 0$  y  $p_{14} = 0$  lo que implica que el vector  $\mathbf{v}_0$  es ortogonal a  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$ , mientras que  $\mathbf{v}_2$  lo es con  $\mathbf{v}_3$  y  $\mathbf{v}_1$  con  $\mathbf{v}_4$ . A dichos retículos se les asigna el grafo conexo  $C_{222}$ , que se muestra en la figura.

La celda de Voronoi tiene 46 vértices, 108 aristas, 84 caras dos dimensionales, entre rectángulos y hexágonos, y 22 caras 3-dimensionales: 16 Cubos y 6 Dodecahedros rómbicos.

Grafo Asociado  $C_{222}$ 

Cubo



Dodecahedro rómbico

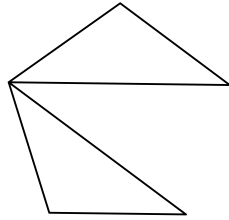
El retículo  $\Lambda = [1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1]$  es de éste tipo. La matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

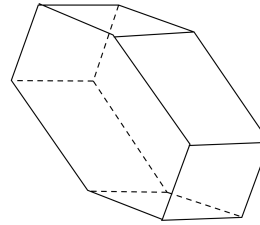
■ **Caso 12** (Cuatro parámetros  $p_{jl} = 0$ ,  $p_{jm} = 0$ ,  $p_{kl} = 0$ ,  $p_{km} = 0$ )

En este caso consideramos cuatro parámetros iguales a cero de tal manera que las cuatro aristas que colpsen siempre hay dos que comparten un índice. Tal como en el caso  $p_{12} = 0$ ,  $p_{13} = 0$ ,  $p_{24} = 0$  y  $p_{34} = 0$  lo que implica que el vector  $\mathbf{v}_1$  es ortogonal con  $\mathbf{v}_2$  y con  $\mathbf{v}_3$  mientras que el vector  $\mathbf{v}_4$  lo es con  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$ . Al retículo se le puede asignar el grafo conexo  $C_3 + C_3$  tal como se muestra en la figura.

La celda de Voronoi tiene 36 vértices, 72 aristas, 48 caras dos dimensionales, entre rectángulos y hexágonos, y 12 caras 3-dimensionales: 12 Prismas hexagonales.



Grafo Asociado  $C_3 + C_3$



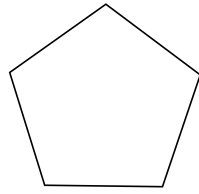
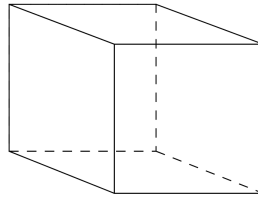
Prisma hexagonal

El retículo  $\Lambda$  con parámetros de Selling  $[1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0]$  es de éste tipo. La matriz de Gram asociada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Caso 13** (Cinco parámetros iguales a cero  $p_{ik} = 0, p_{il} = 0, p_{jl} = 0, p_{jm} = 0, p_{km} = 0$ ).  
En este caso anulamos cinco parámetros de Selling de tal manera que cada uno comparte índices con otros dos, como en el caso de  $p_{02} = 0, p_{03} = 0, p_{24} = 0, p_{13} = 0$  y  $p_{14} = 0$  lo que implica que  $\mathbf{v}_0$  es ortogonal con  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$ ,  $\mathbf{v}_4$  es ortogonal con  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_4$ , mientras que  $\mathbf{v}_1$  es ortogonal con  $\mathbf{v}_3$ . En este caso al retículo se le puede asignar el grafo conexo  $C_5$  tal como se muestra en la figura.

La celda de Voronoi para este tipo de retículos tiene 30 vértices, 70 aristas, 60 caras dos dimensionales todos rectángulos, y 20 caras 3-dimensionales, todas ellas Cubos.

Grafo Asociado  $C_5$ 

Cubo

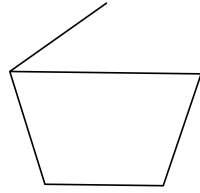
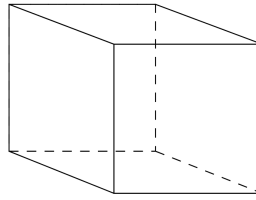
Un retículo de esta clase es  $\Lambda$  con parámetros de Selling  $[1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1]$ . Que tiene como matriz de Gram asociada a:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

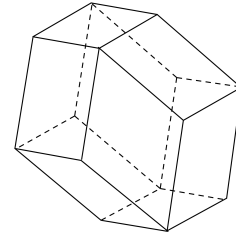
- **Caso 14** (Cinco parámetros iguales a cero como en  $p_{ik} = 0$ ,  $p_{il} = 0$ ,  $p_{im} = 0$ ,  $p_{lj} = 0$ ,  $p_{km} = 0$ )

Hacemos colapsar cinco parámetros de Selling justo como en el caso de  $p_{01} = 0$ ,  $p_{02} = 0$ ,  $p_{03} = 0$ ,  $p_{13} = 0$  y  $p_{24} = 0$ , note que en este caso el vector  $\mathbf{v}_0$  es ortogonal con  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$ ,  $\mathbf{v}_3$  también es ortogonal con  $\mathbf{v}_1$ , y  $\mathbf{v}_2$  lo es con  $\mathbf{v}_4$ . Para ésta clase de retículos se asigna el grafo  $C_4 + 1$ , ver figura.

La celda de Voronoi asociada consta de 28 vértices, 62 aristas, 48 caras dos dimensionales, entre rectángulos y hexágonos, y 14 caras 3-dimensionales, 12 de ellos son Cubos los otros dos son Dodecahedros rómbicos.

Grafo Asociado  $C_4 + 1$ 

Cubo



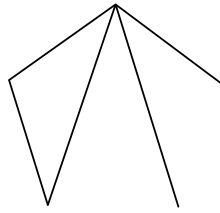
Dodecahedro rómbico

Un retículo típico de esta clase es  $\Lambda$  con parámetros  $[0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1]$ . Cuya matriz de Gram asociada es:

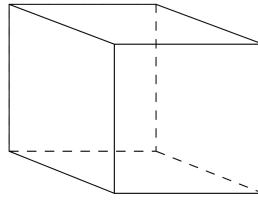
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Caso 15** (Cinco parámetros iguales a cero  $p_{jl} = 0, p_{kl} = 0, p_{lm} = 0, p_{jm} = 0, p_{km} = 0$ )  
 Otro caso que puede ocurrir con cinco parámetros nulos es cuando hay un vector ortogonal a otros tres, de estos tres uno de ellos es ortogonal a los otros dos. Esto ocurre por ejemplo en el caso  $p_{02} = 0, p_{03} = 0$  y  $p_{04} = 0, p_{24} = 0$  y  $p_{34} = 0$ , donde  $\mathbf{v}_0$  es ortogonal a  $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  y  $\mathbf{v}_4$ , al mismo tiempo que  $\mathbf{v}_4$  lo es con  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_3$ . En éste caso al retículo se le puede asignar el grafo conexo  $C_3 + 1 + 1$ , ver figura.

La celda de Voronoi tiene consta de 24 vértices, 48 aristas, 34 caras dos dimensionales rectángulares, y 10 caras 3-dimensionales todas ellas Cubos.



Grafo Asociado  $C_3 + 1 + 1$



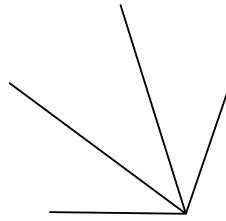
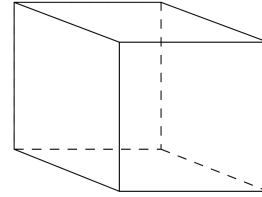
Cubo

El retículo  $\Lambda$  cuyos parámetros de Selling son  $[1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]$  es de éste tipo, su matriz de gram es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- **Caso 16** (Seis parámetros iguales a cero  $p_{ik} = 0$ ,  $p_{il} = 0$ ,  $p_{im} = 0$ ,  $p_{lm} = 0$ ,  $p_{km} = 0$ ,  $p_{lk} = 0$ )  
El último caso posible ocurre cuando todos excepto cuatro parámetros que comparten un índice son distintos de cero. Sin pérdida de generalidad hacemos  $p_{12} = 0$ ,  $p_{13} = 0$  y  $p_{14} = 0$ ,  $p_{23} = 0$ ,  $p_{24} = 0$  y  $p_{34} = 0$ . A reículos así se les asigna el grafo  $1 + 1 + 1 + 1$ , ver figura.  
La celda de Voronoi tiene 16 vértices, 32 aristas, 24 caras dos dimensionales todos rectángulos, y tiene 8 caras 3-dimensionales todas ellas Cubos.

Grafo Asociado  $1 + 1 + 1 + 1$ 

Cubo

El retículo  $\Lambda = [1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$  es de éste tipo. Su matriz de gram asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



## Capítulo 5

# Apéndice

A continuación presentamos algunos de los algoritmos usados para conseguir la descripción de las celdas de Voronoi para retículos 4-dimensionales de Tipo I que se derivan de la celda primitiva de asociada a esta clase de retículos. La implementación que presentamos es para ser ejecutada en el Toolbox de matemática simbólica de Matlab, los procedimientos están basados en las descripciones hechas en el capítulo 3.

En primer lugar es indispensable tener el vector de parámetros de Selling reducidos de retículo, la Matriz de Gram y su determinante para lo cual escribimos.

```
p:=[p_01,p_02,p_03,p_04,p_12,p_13,p_14,p_23,p_24,p_34];
A:=p-> matrix([ [p[1]+p[5]+p[6]+p[7],-p[5],-p[6],-p[7] ],
                [-p[5],p[2]+p[5]+p[8]+p[9],-p[8],-p[9] ],
                [-p[6],-p[8],p[3]+p[6]+p[8]+p[10],-p[10]],
                [-p[7],-p[9],-p[10],p[4]+p[7]+p[9]+p[10]]]):
det:=linalg::det(A(p)):
```

Eventualmente será necesario calcular las  $\mathbf{x}$ -coordenadas de un vector, esto se puede lograr con la subrutina

```
Xco:=proc(v)
// Recibe un vector como combinacion
// lineal de la base {v1,v2,v3,v4} y devuelve sus
// x-coordenadas
local x,t;
begin
v:=subs(v,v_0=-v_1-v_2-v_3-v_4);
t:=[0 $i=1..4];
x:=[{select(v,has, v_.i)} $i=1..4];
for j from 1 to 4 do
    if nops(x[j])=1 then
        t[j]:=op(x[j])v_.j;
    end_if;
end_for;
return(matrix(t))
end_proc;
```

Para calcular las **y**-coordenadas de un punto usamos la subrutina.

```
Yco:=proc(v)
// Este procedimiento recibe un vector como combinacion
// lineal de la bases {v1, v2, v3, v4} y devuelve sus
// y-coordenadas
local A;
begin
A:=matrix([[p_01 + p_12 + p_13 + p_14, -p_12, -p_13, -p_14],
          [-p_12, p_02 + p_12 + p_23 + p_24, -p_23, -p_24],
          [-p_13, -p_23, p_03 + p_13 + p_23 + p_34, -p_34],
          [-p_14, -p_24, -p_34, p_04 + p_14 + p_24 + p_34]]);
return(A*Xco(v));
end_proc;
```

Las normas de los vectores de Voronoi las podemos calcular con

```
N:=proc(v)
// Recibe un vector de Voronoi del reticulo
// y devuelve su norma en funcion de los parametros de Selling asociados
local J,S,norm;
begin
J:=coerce(combinat::subsets::list({ $0..4 }, 2), DOM_SET);
S:=_plus(v_.i $i=0..4);
norm:=subs(expand(v*(v-S)),
  {2*v_.i^2=2*_plus(p_.min({j,i}).max({j,i})
  $j in {$0..4} minus {i}) $i=0..4
  2*v_.0*v_.1=-2*p_0.1, -2*v_.0*v_.1=2*p_0.1,
  2*v_.3*v_.4=-2*p_3.4, -2*v_.3*v_.4=2*p_3.4,
  v_.min(a)*v_.max(a)=-p_.min(a).max(a)$ a in J,
  -v_.min(a)*v_.max(a)=p_.min(a).max(a) $ a in J});
return(norm);
end_proc;
```

Para calcular **y**-coordenadas de un vértice podemos usar la subrutina.

```
Y:=proc(v)
// Recibe los vectores que dirigen las Facets a las que pertenece un vertice
// y devuelve las y-coordenadas del mismo.
local a;
begin
a:=linsolve({subs(v[j], {v_.i=y_.i $ i=0..4}) = 1/2*N(v[j])
  $j=1..4, _plus(y_.i $ i=0..4)=0}, {y_.i $ i=0 .. 4 });
return(subs(matrix([y_.i $i=1..4]), a));
end_proc;
```

La siguiente subrutina permite encontrar la lista de todas las aristas de la celda de Voronoi, en términos de conocidos sus vértices.

```
arista:=proc(L)
// Recibe la lista de vertices de la celda de Voronoi
// y devuelve las parejas de vertices que forman una arista
local s3;
begin
  s3:={op(combinat::subsets::list(L[i],3)) $i=1..120}:
  return({_union(select(L, x-> x union s3[i]=x)) $i=1..240}):
end_proc;
```

Para encontrar la cantidad de aristas en cada cara dos dimensional

```
Face2:=proc(V)
//Recibe la lista de vectores de Voronoi
//Devuelve la cantidad de caras 2 dimensionales de cada facet
local i,f,F,k;
begin
  for i from 1 to 15 do
    v:=V[i]:
    F:=( _union(op(select(L, x-> x union {v} = x))) minus {v} );
    k:=[]:
    for j in F do
      f:={ };
      f:= F intersect ( _union(op(select(L, x-> x union {j}=x))) minus {v,j} );
      k:=[op(k),nops(f)];
    end_for;
    print(k,{v});
  end_for;
end_proc;
```

Con la siguiente subrutina encontramos todos los vértices de las Facets de la celda, y los agrupamos en conjuntos que determinan las 2-caras.

```
VerCaras2d:=proc(L,v)
// Recibe la lista de vertices y un vector de voronoi
// Devuelve los vertices de las caras 2 dimensionales
//de la facet que corresponde al vector de voronoi dado.
local j,t,s,i,k;
begin
  t:=( _union(op(select(L, x->x union {v}=x))) minus {v} );
  k:=[]:
  for j in t do
    s:=[]:
    for i in {$1..120} do
```

```
    if ( $\{j,v\}$  subset  $L[i]$ ) then
       $s := \{op(s), L[i]\}$ ;
    end_if;
  end_for;
   $k := \{op(k), s\}$ 
end_for;
  return( $k$ );
end_proc;
```

# Bibliografía

- [BS] BARNES, E. S.; SLOANE, N. J. A. The optimal lattice quantizer in three dimensions. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* **4** (1983), no. 1, 30–41.
- [Cat] SLOANE, N. J. A. A Catalogue of Lattices. <http://www2.research.att.com/~njas/lattices/>
- [Ch] CHARVE, L. De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* **2**, tome 11 (1882), 119–134.
- [Co] CONWAY, J. H. (with the assistance of F.Y.C. FUNG), The sensual (quadratic) form, *Carus Mathematical Monographs*, **26** Math. Assoc. of America, Washington, DC (1997).
- [CS] CONWAY, J. H.; SLOANE, N. J. A. Sphere Packing, Lattices and Groups. *Springer-Verlag 3rd Edition* (1999).
- [CS1] CONWAY, J. H.; SLOANE, N. J. A. Low-dimensional lattices. VI. Voronoi reduction of three-dimensional lattices. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **436** (1992), 55–68.
- [De] DELONE, B. N. Sur la partition régulière de l'espace à 4-dimensions. *Izv. Akad. Nauk SSSR Otdel. Fiz.-Mat. Nauk* **7** (1929), 79–110 and 145–164
- [En] ENGEL, P. Investigations of parallelohedra in  $\mathbb{R}^d$ , *Voronoi's Impact on Modern Science*, (eds), Institute of Mathematics, Kyiv, **2**, (1998), 22–60.
- [DG] DEZA, M; GRISHUKHIN, V.P. More about 52 four-dimensional parallelotopes, *Taiwanese J. Math.* **12** (2008), no. 4, 901â916. <http://arxiv.org/pdf/math/0307171>
- [Fed] FEDOROV, E.S. Elements of the study of figures. *Zap. Mineralog. Obsc. (2)* **21**, 1–279. Reprinted by Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1953.
- [Ro] ROSSETTI, J.P. Retículos en espacios euclídeos, [http://www.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie\\_b/BMat48-3.pdf](http://www.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie_b/BMat48-3.pdf)
- [Sc] SCHÜRMANN, A. Computational Geometry of Positive Definite Quadratic Forms: Polyhedral Reduction Theories, Algorithms, and Applications, *AMS* 2009, 162 pages.
- [SV] SCHÜRMANN, A.; VALLENTIN F. Computational Approaches to Lattice Packing and Covering Problems, <http://arxiv.org/pdf/math/0403272v3> 2005, 40 pages.
- [Va] VALLENTIN, F. Sphere covering, lattices, and tilings (in low dimensions), *Ph.D. thesis, Technical University Munich*, Germany, (2003), 128 pages.

- [Vo] VORONOI, G.F. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. *J. Reine Angew. Math.* **133** (1908), 97–178; **134** (1908) 198–287; **136**, (1909) 67–181 [2,21].